



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ROBOTICKÝ MANIPULÁTOR PROSTŘEDKY CGA

ROBOTIC MANIPULATOR BASED ON CGA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Marek Stodola

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Bc. Marek Stodola**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Robotický manipulátor prostředky CGA

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Konformní geometrická algebra (CGA) díky svým algebraickým vlastnostem umožňuje modelovat analytickou geometrii doplněnou o kružnice (sféry).

Cíle diplomové práce:

Nastudovat vlastnosti CGA.

Zvládnout řešit problémy analytické geometrie použitím CGA.

Sestavení dopředné kinematiky.

Diskuze inverzní kinematiky a využití binokulárního vidění.

Seznam doporučené literatury:

DORAN, CH., LASENBY, A. Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, 2013, 592 s. DORST, L., FONTIJNE, D., MANN, S. Geometric Algebra for Computer Science: An Object-Oriented Approach to Geometry, Morgan Kaufmann, 2010, 664 s.

CORROCHANO, E. B., SOBCZYK, G. Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering, Birkhäuser 2001, 592s. PERWASS, CH. Geometric Algebra with Applications in Engineering (Geometry and Computing), Springer, 2009, 386 s.

SELIG, J. M. Geometric Fundamentals of Robotics, Monographs in Computer Science, Springer, 2005, 398 s.

ROUSSEAU, Ch. Mathematics and Technology, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology Springer (2008).

MOTL, L., ZAHRADNÍK, M. Pěstujeme lineární algebru, Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2002. 348 s.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

V práci je definována konformní geometrická algebra, uvedeny jsou reprezentace geometrických objektů a možnosti jejich geometrických transformací. Konformní geometrická algebra je aplikována na výpočet dopředné kinematiky robotického manipulátoru UR10 od firmy Universal Robots. Dále je aplikována na určení pozice stroje na základě polohy dvou kamer včetně jejich natočení. Poté je použita při inverzní úloze, kdy je na základě záznamů ze dvou kamer, rozměrů manipulátoru UR10 a možností jeho pohybu určena vzájemná poloha těchto kamer vůči sobě a následně možnosti jejich umístění v prostoru. Na závěr jsou odvozené postupy implementovány ve vlastním programu vytvořeném v prostředí CluCalc, pomocí kterého je vypočítán vzorový příklad ověřující správnost těchto postupů.

Abstract

Conformal geometric algebra is defined in the thesis. Representations of geometric objects and possibilities of their geometric transformations are presented. Conformal geometric algebra is applied to the calculation of forward kinematics of a robotic manipulator UR10 from Universal Robots. It is also applied to determine the position of the machine based on the location and rotation of two cameras. Then it is used in an inverse task, where based on records from the two cameras, dimensions of the UR10 manipulator and possibilities of its movement, the mutual position of these cameras is determined. And consequently the possibilities of their location in space. Finally, the derived procedures are implemented in a custom program created in the CluCalc environment, using which a sample example verifying the correctness of these procedures is calculated.

Klíčová slova

Cliffordova algebra, konformní geometrická algebra, robotický manipulátor UR10, dopředná kinematika, binokulární vidění, CluCalc

Keywords

Clifford algebra, conformal geometric algebra, robotic manipulator UR10, forward kinematics, binocular vision, CluCalc

STODOLA, Marek. *Robotický manipulátor prostředky CGA* [online]. Brno, 2019 [cit. 2019-05-24]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117442>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Jaroslav Hrdina.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Robotický manipulátor prostředky CGA* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Marek Stodola

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu práce doc. Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za cenné rady a velmi vstřícný přístup po celou dobu vedení práce. Dále bych rád poděkoval svým rodičům, bratru Jakubovi, přítelkyni Lucii a její matce Olze za kontrolu překlepů a pravopisných chyb. Všem také děkuji za psychickou podporu při psaní práce.

Marek Stodola

Obsah

Úvod	2
1 Geometrická algebra CGA	3
1.1 Volná (lineární) algebra	3
1.2 Zavedení geometrické algebry CGA	4
1.3 Reprezentace geometrických objektů z \mathbb{R}^3	7
1.4 Geometrické transformace v CGA	17
2 Robotický manipulátor UR10	19
3 Dopředná kinematika manipulátoru UR10	21
4 Rekonstrukce 3D scény pomocí dvou kamer	23
4.1 Rekonstrukce reálné polohy stroje	23
4.2 Inverzní rekonstrukce	27
5 Inverzní úloha - nalezení polohy kamer	28
5.1 Vzájemné natočení kamer	28
5.2 Vzájemné posunutí kamer	34
5.3 Možnosti poloh kamer	36
6 Vzorový příklad vypočítaný programem v prostředí CluCalc	42
6.1 Popis programu	42
6.2 Příklad	44
Závěr	46
Seznam použitých zdrojů	47
Seznam příloh	48

Úvod

Pro řešení problémů analytické geometrie lze použít aparát Cliffordových neboli geometrických algeber. O teorii Cliffordových algeber je více v [2, 3, 7]. Prvky těchto algeber mají geometrický význam, reprezentují například nějaký geometrický objekt nebo geometrickou transformaci. Aparát Cliffordových algeber se pak díky snadným geometrickým operacím s objekty aplikuje například ve fyzice, v obrazové analýze nebo v robotice. O těchto aplikacích se lze dočíst například v [1, 2, 3, 4, 7, 8, 9].

Za základní geometrické algebry lze považovat komplexní čísla a kvaterniony. Dalším zobecněním těchto algeber získáváme možnost pracovat s reprezentacemi komplikovanějších geometrických objektů, avšak za cenu nárůstu dimenze algebry, a tedy i výpočetní náročnosti. Jako vhodný kompromis mezi matematickými a výpočetními možnostmi je v této práci využívána tzv. konformní geometrická algebra [3, 4, 7]. Tuto algebru budeme dále značit *CGA*. *CGA* lze charakterizovat jako 32-dimenzionální algebru, umožňující různé geometrické operace se sférami, kružnicemi, rovinami, přímkami, body a dvojicemi bodů - dvojbody, jako například získání vzdálenosti dvou objektů, případně jejich odchylky, nalezení jejich průniku, posunutí a rotace objektů, atd. Teorie týkající se *CGA* je uvedena v kapitole 1.

Aplikace *CGA* v robotice jsou ukázány na robotickém manipulátoru UR10 od firmy Universal Robots. Tento přístroj je určen k fyzické manipulaci komponent ve výrobním procesu, tím přispívá k jeho automatizaci. Manipulátor svým vzhledem a způsobem pohybu připomíná lidskou paži, proto je někdy nazýván jako robotické rameno. Stroj má možnost rotačního pohybu v šesti kloubech. Technické specifikace manipulátoru jsou uvedeny v kapitole 2 a v [10].

V kapitolách 3, 4 a 5 jsou odvozené vlastní postupy. V kapitole 3 je vyřešen problém dopředné kinematiky, tedy vyjádření výsledné polohy stroje na základě rotací v jednotlivých kloubech. Postupy odvozené v kapitolách 4 a 5 se snaží přispět k vývoji řízení stroje pomocí binokulárního vidění. V kapitole 4 je na základě záznamů ze dvou kamer zrekonstruována pozice stroje v prostoru při známé poloze kamer v prostoru (včetně jejich natočení). V kapitole 5 je pak řešena inverzní úloha, kde jsou na základě záznamů kamer, možností pohybu stroje a jeho rozměrů určeny vzájemná poloha kamer vůči sobě a možné polohy kamer v prostoru. Smyslem odvození v kapitole 5 je snížení nepřesností, kdy je přesná poloha kamer zatížena chybou. Potom známe jen přibližnou polohu kamer, výsledná rekonstrukce stroje je tedy zkreslená.

V kapitole 6 je pak vypočítán vzorový příklad pomocí vlastního programu vytvořeného v prostředí CluCalc, který potvrzuje správnost odvozených postupů. Prostředí CluCalc je určeno výhradně na výpočty v geometrických algebrách, seznámení s prostředím včetně ukázek je například v [4, 7].

1 Geometrická algebra CGA

1.1 Volná (lineární) algebra

Poznámka 1.1. Základy teorie lineární algebry lze nalézt v [6].

Definice 1.2. Nechť $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je množina prvků, kterou nazveme *abecedou*. Konečnou posloupnost \mathbf{x}_i prvků z množiny X budeme zapisovat ve tvaru $\mathbf{x}_i = (x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\dots x_{i_m})$, $x_{i_j} \in X$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. K množině všech konečných posloupností přidáme prázdnou posloupnost, kterou označíme λ . Množinu všech těchto posloupností označíme L a nazveme ji *jazykem nad abecedou X* . Prvky z L nazveme *slovy nad abecedou X* , přičemž λ dále budeme nazývat jako *prázdné slovo*. Dále definujeme mezi slovy jazyka L tuto binární operaci:

$$\mathbf{x}\lambda = \lambda\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in L, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j = (x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}) = (x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_m}x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}), \quad \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \neq \lambda. \quad (1.2)$$

Tuto operaci budeme dále nazývat *skládáním slov*.

Poznámka 1.3. Operace skládání slov je uzavřená na L pouze při konečném počtu užití.

Definice 1.4. Nechť A je vektorový prostor a jazyk L nad abecedou $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je jeho bází. Prvek $\mathbf{a} \in A$ budeme zapisovat ve tvaru

$$\mathbf{a} = \sum_{l_i \in L} a_i l_i, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Vektorový součet prvků $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ definujeme jako

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_{l_i \in L} (a_i + b_i) l_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

násobení skalárem definujeme jako

$$c\mathbf{a} = \sum_{l_i \in L} ca_i l_i, \quad c, a_i \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Poznámka 1.5. Prostor A z předchozí definice má nekonečnou dimenzi.

Definice 1.6. Nechť A je vektorový prostor nad polem \mathbb{R} . Nechť $\odot : A \times A \rightarrow A$ je operátor s těmito vlastnostmi:

$$\mathbf{a} \odot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \odot \mathbf{b} + \mathbf{a} \odot \mathbf{c}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A, \quad (1.6)$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \odot \mathbf{a} = \mathbf{b} \odot \mathbf{a} + \mathbf{c} \odot \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in A, \quad (1.7)$$

$$(r\mathbf{a}) \odot \mathbf{b} = r(\mathbf{a} \odot \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A, \forall r \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{a} \odot (r\mathbf{b}) = r(\mathbf{a} \odot \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in A, \forall r \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

pak objekt (A, \odot) nazveme *(lineární) algebrou* nad polem \mathbb{R} . Operaci \odot budeme nazývat *součinem* na algebře (nebo prostoru) A .

Poznámka 1.7. Při součinu dvou prvků z (lineární) algebry budeme dále symbol \odot vynechávat, takže $\mathbf{a} \odot \mathbf{b} \equiv \mathbf{ab}$.

Věta 1.8. *Splňuje-li součin na prostoru A z definice 1.4 kromě vlastností (1.6)-(1.9) navíc ještě vlastnosti (1.1) a (1.2), kde L je báze prostoru A , pak je jednoznačně určen.*

Důkaz. Viz [7]. □

Definice 1.9. Vektorový prostor A z definice 1.4 se součinem splňujícím vlastnosti (1.1), (1.2), (1.6)-(1.9) nazveme *volnou (lineární) algebrou* nad abecedou X .

Věta 1.10. *Součin na volné (lineární) algebře je asociativní.*

Důkaz. Viz [7]. □

1.2 Zavedení geometrické algebry CGA

Definice 1.11. Necht A je volná (lineární) algebra nad abecedou $X = \{e_1, e_2, e_3, e_+, e_-\}$. Provedme faktorizaci A vzhledem k následujícím identitám:

$$e_i^2 = 1, \quad i \in \{1, 2, 3, +\}, \quad (1.10)$$

$$e_-^2 = -1, \quad (1.11)$$

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad i, j \in \{1, 2, 3, +, -\}, \quad i \neq j. \quad (1.12)$$

Nově vzniklý objekt nazveme *konformní geometrickou algebrou*. Tuto algebru budeme dále značit CGA . Báze CGA je uvedena v tabulce 1.

Věta 1.12. *Součin na konformní geometrické algebře je asociativní.*

Důkaz. Viz [7]. □

Stupeň	Název	Prvek	počet
0	Skalár (0-vektor)	1,	1
1	Vektory (1-vektory)	e_1, e_2, e_3, e_+, e_- ,	5
2	Bivektory (2-vektory)	$e_2 e_3, e_3 e_1, e_1 e_2,$ $e_1 e_+, e_2 e_+, e_3 e_+,$ $e_1 e_-, e_2 e_-, e_3 e_-,$ $e_+ e_-$,	10
3	Trivektory (3-vektory)	$e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_+, e_1 e_2 e_-,$ $e_1 e_3 e_+, e_1 e_3 e_-, e_1 e_+ e_-,$ $e_2 e_3 e_+, e_2 e_3 e_-, e_2 e_+ e_-,$ $e_3 e_+ e_-$,	10
4	Kvadvektory (4-vektory)	$e_1 e_2 e_3 e_+, e_1 e_2 e_3 e_-,$ $e_1 e_2 e_+ e_-, e_1 e_3 e_+ e_-,$ $e_2 e_3 e_+ e_-$,	5
5	Pseudoskalár (5-vektor)	$e_1 e_2 e_3 e_- e_+ = I.$	1
Dimenze CGA :			32

Tabulka 1: Báze CGA

Definice 1.13. Obecný prvek z CGA nazveme *multivektorem*. Necht $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m \in CGA$ jsou bazové k -vektory (viz tabulka 1), $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$, pak prvek $c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_m \mathbf{a}_m$ také nazveme k -vektorem, $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$.

Poznámka 1.14. Nulový prvek je k -vektor pro všechna $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

Poznámka 1.15. Libovolný multivektor lze zapsat jako $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^5 \mathbf{a}_k$, kde \mathbf{a}_k je k -vektor.

Definice 1.16. Necht' $\mathbf{a} = \sum_{k=0}^5 \mathbf{a}_k$ je multivektor, kde \mathbf{a}_k je k -vektor. Definujme zobrazení $\langle \cdot \rangle_k : CGA \rightarrow CGA$ jako

$$\langle \mathbf{a} \rangle_k = \mathbf{a}_k. \quad (1.13)$$

Definice 1.17. Necht' $\mathbf{a} \in CGA$ je k -vektor a $\mathbf{b} \in CGA$ je l -vektor. Zaved'me následující binární operace:

$$\mathbf{a} \wedge 0 = 0 \wedge \mathbf{a} = 0, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{ab} \rangle_{k+l}, \quad k+l \leq 5, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq 0, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0, \quad k+l > 5, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq 0, \quad (1.16)$$

tuto operaci nazveme *vnějším součinem*,

$$\mathbf{a} \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle \mathbf{ab} \rangle_{|k-l|}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq 0, \quad (1.18)$$

tuto operaci nazveme *vnitřním součinem*.

Věta 1.18. *Vnější součin je asociativní. Vnější i vnitřní součin jsou distributivní zleva i zprava vzhledem k operaci $+$.*

Důkaz. Viz [7]. □

Poznámka 1.19. Nyní máme zavedeno několik operací, pro lepší přehlednost matematického zápisu zavádíme v tabulce 2 jejich uspořádání. Operace s nižší prioritou má přednost před operací s vyšší prioritou.

Operace	Symbol	Priorita
Součin		0
Vnější součin	\wedge	1
Vnitřní součin	\cdot	2
Součet a rozdíl	$+, -$	3

Tabulka 2: Priorita operací

Označme symboly e_∞ a e_0 následující prvky z CGA :

$$e_\infty = e_- + e_+, \quad e_0 = \frac{1}{2}(e_- - e_+). \quad (1.19)$$

Nyní odvodíme některé identity prvků e_∞ a e_0 vzhledem k operacím součin a vnější součin:

$$e_\infty^2 = e_-^2 + e_-e_+ + e_+e_- + e_+^2 = -1 + e_-e_+ - e_-e_+ + 1 = 0, \quad (1.20)$$

$$e_0^2 = \frac{1}{4}(e_-^2 - e_-e_+ - e_+e_- + e_+^2) = 0, \quad (1.21)$$

$$e_\infty e_0 = \frac{1}{2}(e_- + e_+)(e_- - e_+) = \frac{1}{2}(e_-^2 - e_-e_+ + e_+e_- - e_+^2) = e_+e_- - 1, \quad (1.22)$$

$$e_\infty \wedge e_0 = \frac{1}{2}(e_- + e_+) \wedge (e_- - e_+) = \frac{1}{2}(-e_- \wedge e_+ + e_+ \wedge e_-) = e_+ \wedge e_-, \quad (1.23)$$

takže

$$e_\infty e_0 = e_\infty \wedge e_0 - 1, \quad (1.24)$$

podobně

$$e_0 e_\infty = e_0 \wedge e_\infty - 1, \quad (1.25)$$

$$e_0 \wedge e_\infty = e_- e_+ = -e_\infty \wedge e_0, \quad (1.26)$$

z toho vyplývá, že

$$e_\infty e_0 = -e_0 e_\infty - 2. \quad (1.27)$$

Pro operaci vnitřní součin lze snadno zjistit, že

$$e_1 \cdot e_1 = e_2 \cdot e_2 = e_3 \cdot e_3 = 1, \quad (1.28)$$

$$e_\infty \cdot e_\infty = e_0 \cdot e_0 = 0, \quad (1.29)$$

$$e_\infty \cdot e_0 = e_0 \cdot e_\infty = -1, \quad (1.30)$$

$$e_i \cdot e_j = e_i \cdot e_\infty = e_i \cdot e_0 = 0, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j. \quad (1.31)$$

Z (1.19) lze vyjádřit, že

$$e_- = \frac{1}{2}e_\infty + e_0, \quad e_+ = \frac{1}{2}e_\infty - e_0. \quad (1.32)$$

V tabulce 3 je uvedena modifikovaná báze, zapsaná pomocí výše uvedených symbolů a operátorů, se kterou dále budeme pracovat. Tato báze se obvykle používá při práci s geometrickými objekty v *CGA*, viz [3, 4, 7].

Stupeň	Název	Prvek	počet
0	Skalár (0-vektor)	1,	1
1	Vektory (1-vektory)	$e_1, e_2, e_3, e_\infty, e_0,$	5
2	Bivektory (2-vektory)	$e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2,$ $e_1 \wedge e_\infty, e_2 \wedge e_\infty, e_3 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_0, e_2 \wedge e_0, e_3 \wedge e_0,$ $e_\infty \wedge e_0,$	10
3	Trivektory (3-vektory)	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_\infty, e_1 \wedge e_2 \wedge e_0,$ $e_1 \wedge e_3 \wedge e_\infty, e_1 \wedge e_3 \wedge e_0, e_1 \wedge e_\infty \wedge e_0,$ $e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty, e_2 \wedge e_3 \wedge e_0, e_2 \wedge e_\infty \wedge e_0,$ $e_3 \wedge e_\infty \wedge e_0,$	10
4	Kvadvektory (4-vektory)	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_0,$ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_\infty \wedge e_0, e_1 \wedge e_3 \wedge e_\infty \wedge e_0,$ $e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty \wedge e_0,$	5
5	Pseudoskalár (5-vektor)	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty \wedge e_0 = I.$	1

Tabulka 3: Modifikovaná báze *CGA*

Věta 1.20. *Nechť \mathbf{x}, \mathbf{y} jsou 1-vektory, nechť \mathbf{A} je k -vektor a \mathbf{B} je l -vektor, pak platí, že*

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}, \quad (1.33)$$

$$\mathbf{A} \cdot I\mathbf{B} = I(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}), \quad (1.34)$$

$$\mathbf{A} \wedge I\mathbf{B} = I(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (1.35)$$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{A}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \wedge \mathbf{A} - \mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}). \quad (1.36)$$

Důkaz. Viz [3]. □

1.3 Reprezentace geometrických objektů z \mathbb{R}^3

V této části ukážeme, jakým způsobem jsou reprezentovány geometrické objekty (body, sféry, roviny, kružnice, přímky a dvojice bodů - dvojbody) z \mathbb{R}^3 v CGA . Mějme reprezentaci nějakého bodu $\mathbf{P} \in CGA$ a nějakou reprezentaci geometrického objektu $\mathbf{A} \in CGA$. Geometrické objekty budeme reprezentovat tak, aby platilo:

$$\mathbf{P} \in \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.37)$$

Chceme tedy, aby vnitřní součin nějakým způsobem vyjadřoval vzdálenost mezi bodem a geometrickým objektem a aby byl roven nule, když bod na daném objektu leží. Ze vztahu (1.35) plyne, že

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \wedge I\mathbf{A} = 0, \quad (1.38)$$

má tedy smysl uvažovat i duální reprezentaci objektu \mathbf{A} ve tvaru $I\mathbf{A}$ (případně $-I\mathbf{A}$). Potom platí analogie (1.37):

$$\mathbf{P} \in \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{P} \wedge I\mathbf{A} = 0. \quad (1.39)$$

Je-li splněno (1.37), pak \mathbf{A} nazveme vnitřní (IPNS) reprezentací geometrického objektu, je-li splněno (1.39), pak $I\mathbf{A}$ nazveme vnější (OPNS) reprezentací geometrického objektu. Výhody obou reprezentací budou uvedeny dále.

Poznámka 1.21. Protože vnější i vnitřní součin splňují vlastnost (1.9), pak pro libovolný bod a reprezentaci geometrického objektu \mathbf{A} , resp. $I\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow k(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \cdot (k\mathbf{A}) = 0, \quad k \in \mathbb{R}/\{0\}, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{P} \wedge I\mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow k(\mathbf{P} \wedge I\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \wedge (kI\mathbf{A}) = 0, \quad k \in \mathbb{R}/\{0\}. \quad (1.41)$$

Nalezneme-li tedy reprezentaci geometrického objektu \mathbf{A} , resp. $I\mathbf{A}$, pak i $k\mathbf{A}$, resp. $kI\mathbf{A}$, je jeho reprezentací. Za některých okolností však budeme potřebovat nějaký standardní tvar geometrického objektu, který obdržíme dělením reprezentace konkrétním k (dle požadovaného standardu).

Dále bude ukázáno, jakým způsobem se nalezne IPNS, resp. OPNS reprezentace konkrétního geometrického objektu, postupy odvození jsou převzaty z [3]. Díky více typům reprezentace máme více možností, jak konkrétní objekt nalézt. Například IPNS reprezentaci sféry nalezneme snadno, známe-li její střed a poloměr, roviny, známe-li její normálový vektor a vzdálenost od počátku. U IPNS reprezentace bude mít dále klíčovou roli průnik objektů - kružnice je průnik dvou sfér, přímka je průnik dvou rovin atd. OPNS reprezentaci nalezneme vždy snadno pomocí známých bodů na objektu - sféra je jednoznačně daná čtyřmi body, kružnice a rovina třemi body, přímka a dvojbod dvěma body.

IPNS reprezentace bodu

Nejdříve zavedeme několik elementárních reprezentací. Nechť vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ z \mathbb{R}^3 je v CGA reprezentován prvkem $\mathbf{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, počátek soustavy souřadnic prvkem e_0 a bod v nekonečnu prvkem e_∞ . Zde vidíme, že na počátek soustavy souřadnic e_0 už nepohlížíme jako na nulový vektor z \mathbb{R}^3 , protože není roven nule, ale jako na bod. Vidíme tedy, že bod od vektoru lze odlišit přičtením prvku e_0 . Bod \mathbf{P} by byl pak zapisován

ve tvaru $\mathbf{P} = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + e_0$, nebyla by však obecně splněna podmínka (1.37) - chceme, aby $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = 0$, protože bod leží sám na sobě. Přidejme tedy ještě člen ae_∞ , kde a dopočítáme tak, aby platilo $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = 0$ (přidáváme násobek prvku e_∞ , aby \mathbf{P} byl 1-vektor, takže $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$ je skalár). Pak platí

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} &= (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + ae_\infty + e_0) \cdot (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + ae_\infty + e_0) \\ &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2a = 0,\end{aligned}\tag{1.42}$$

takže $a = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2$, kde \mathbf{p} je polohový vektor bodu \mathbf{P} . Bod \mathbf{P} tedy bude reprezentován v CGA jako

$$\mathbf{P} = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2e_\infty + e_0 = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2e_\infty + e_0.\tag{1.43}$$

Poznámka 1.22. Tvar (1.43) je zároveň OPNS reprezentace bodu, protože $\mathbf{P} \wedge \mathbf{P} = 0$. Jedná se tedy o jedinou reprezentaci bodu, kterou budeme uvažovat.

Dále ukážeme, čemu je roven vnitřní součin dvou obecných bodů. Vnitřní součin je na $\{e_1, e_2, e_3\}$ euklidovský skalární součin, takže $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \cos \alpha$. Pro vnitřní součin dvou bodů tedy platí, že

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} &= (\mathbf{p} + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2e_\infty + e_0) \cdot (\mathbf{q} + \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2e_\infty + e_0) \\ &= -\frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2 + \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\| \cos \alpha = -\frac{1}{2}d^2,\end{aligned}\tag{1.44}$$

kde α je úhel mezi vektory \mathbf{p} a \mathbf{q} a d je dle kosinové věty vzdálenost mezi body \mathbf{P} a \mathbf{Q} . Odvodili jsme tedy, že pomocí vnitřního součinu lze jednoznačně určit vzdálenost mezi dvěma body.

Poznámka 1.23. Pro bod v nekonečnu e_∞ a libovolný (konečný) bod \mathbf{P} platí, že

$$\mathbf{P} \cdot e_\infty = -1.\tag{1.45}$$

Bod v nekonečnu je tedy vzdálen od každého (konečného) bodu z \mathbb{R}^3 stejně, tato vzdálenost je normována volbou počátku e_0 .

IPNS reprezentace sféry

Nyní chceme nalézt reprezentaci sféry. Nechť \mathbf{C} je střed sféry a r její poloměr. Sféra je množina všech bodů vzdálených r od bodu \mathbf{C} . Pro libovolný bod \mathbf{P} ležící na sféře platí dle vztahu (1.44), že

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} = -\frac{1}{2}r^2.\tag{1.46}$$

Dále využijeme toho, že pro každý bod \mathbf{P} platí (1.45), pak

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} + \frac{1}{2}r^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} - \frac{1}{2}r^2\mathbf{P} \cdot e_\infty = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{C} - \frac{1}{2}r^2e_\infty) = 0,\tag{1.47}$$

a sféra \mathbf{S} daná středem \mathbf{C} a poloměrem r má tedy standardní IPNS reprezentaci ve tvaru

$$\mathbf{S}_{st} = \mathbf{C} - \frac{1}{2}r^2e_\infty = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + \frac{1}{2}(\|\mathbf{c}\|^2 - r^2)e_\infty + e_0.\tag{1.48}$$

Poznámka 1.24. IPNS reprezentace je obecně jednoznačně dána až na násobek (viz poznámka 1.21). Pro libovolnou sféru ve standardním tvaru (1.48) a bod v nekonečnu platí, že

$$\mathbf{S}_{st} \cdot e_\infty = -1. \quad (1.49)$$

Není-li však sféra ve standardním tvaru, ale ve tvaru $\mathbf{S} = k\mathbf{S}_{st}$, $k \neq 0$, pak platí, že

$$\mathbf{S} \cdot e_\infty = -k. \quad (1.50)$$

Standardní reprezentaci sféry lze tedy získat následovně:

$$\mathbf{S}_{st} = -\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{S} \cdot e_\infty}. \quad (1.51)$$

IPNS reprezentace roviny

Nyní ukážeme, jak nalézt IPNS reprezentaci roviny, která je dána svým normálovým vektorem \mathbf{n} , $\|\mathbf{n}\| = 1$ a vzdáleností d od počátku e_0 ve směru normály. V \mathbb{R}^3 by obecné vyjádření této roviny bylo zapsáno ve tvaru $n_1x + n_2y + n_3z - d = 0$. Mějme libovolný bod \mathbf{P} ležící na rovině π , pak platí, že

$$d = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad (1.52)$$

takže

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} - d = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} + d\mathbf{P} \cdot e_\infty = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{n} + de_\infty) = 0. \quad (1.53)$$

Standardní IPNS reprezentace roviny je tedy ve tvaru

$$\pi_{st} = \mathbf{n} + de_\infty = n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3 + de_\infty. \quad (1.54)$$

Dále ukážeme reprezentaci roviny souměrnosti bodů \mathbf{P} a \mathbf{Q} , toho později využijeme při dalším odvozování. Rovina souměrnosti je množina všech bodů \mathbf{R} , pro které platí

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}, \quad (1.55)$$

takže

$$\mathbf{R} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{Q}) = 0, \quad (1.56)$$

a IPNS reprezentace roviny souměrnosti bodů \mathbf{P} a \mathbf{Q} je pak ve tvaru

$$\pi = \mathbf{P} - \mathbf{Q}. \quad (1.57)$$

Standardní IPNS reprezentaci bychom pak dostali podělením velikosti normálového vektoru. Pomocí vnitřního součinu lze standardní reprezentaci roviny získat následovně:

$$\pi_{st} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi \cdot \pi}}. \quad (1.58)$$

Vnitřní součin mezi IPNS reprezentacemi odvozených geometrických objektů

Dále odvodíme geometrický význam vnitřního součinu mezi výše odvozenými IPNS reprezentacemi geometrických objektů - bodů, sfér a rovin. Tato odvození lze nalézt například v [3, 4, 7]. IPNS reprezentace těchto objektů budeme vždy uvažovat ve standardním tvaru. Význam vnitřního součinu dvou bodů je již odvozen v rovnici (1.44).

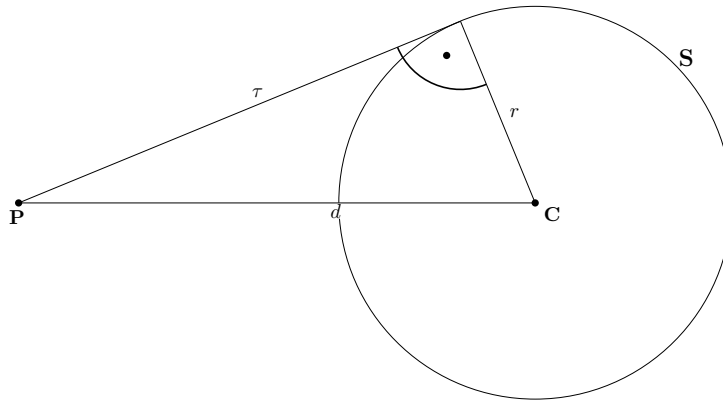
Bod a sféra:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} &= (p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 e_\infty + e_0) \cdot (c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \frac{1}{2} (\|\mathbf{c}\|^2 - r^2) + e_0) \\ &= p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3 - \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{c}\|^2 + \frac{1}{2} r^2 = -\frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{2} r^2, \end{aligned} \quad (1.59)$$

kde d je vzdálenost mezi bodem \mathbf{P} a středem sféry \mathbf{C} . Z Pythagorovy věty plyne, že

$$\sqrt{-2(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S})} = \tau, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} < 0, \quad (1.60)$$

kde τ je tečná vzdálenost bodu a sféry (viz obrázek 1). Platí tedy, že když $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} < 0$, pak bod \mathbf{P} leží vně sféry \mathbf{S} . Dále platí, že když $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = 0$, pak bod \mathbf{P} leží na sféře \mathbf{S} , když $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} > 0$, pak bod \mathbf{P} leží uvnitř sféry \mathbf{S} .



Obrázek 1: Tečná vzdálenost bodu a sféry

Poznámka 1.25. Vzhledem k poznámce 1.24 leží bod v nekonečnu vně každé sféry a má od každé z nich stejnou tečnou vzdálenost. Tato vzdálenost je normována volbou počátku e_0 .

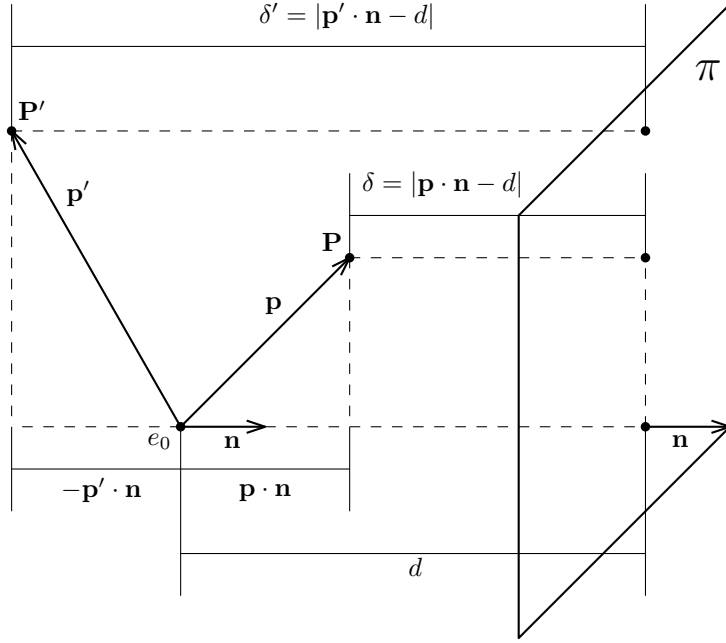
Bod a rovina:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \pi &= (p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 + \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 e_\infty + e_0) \cdot (n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + d e_\infty) \\ &= p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 - d = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} - d. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Protože $\|\mathbf{n}\| = 1$, pak

$$|\mathbf{P} \cdot \pi| = \delta, \quad (1.62)$$

kde δ je vzdálenost bodu \mathbf{P} od roviny π (viz obrázek 2).



Obrázek 2: Vzdálenost bodu od roviny vyjádřená pomocí skalárního součinu, diskutovány oba případy pozice bodu \mathbf{P} (\mathbf{P}')

Poznámka 1.26. Pro libovolnou rovinu π a bod v nekonečnu e_∞ platí, že

$$e_\infty \cdot \pi = 0, \quad (1.63)$$

vidíme tedy, že každá rovina protíná bod v nekonečnu.

Sféra a rovina:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \pi &= (\mathbf{C} - \frac{1}{2}r^2 e_\infty) \cdot (n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + d e_\infty) \\ &= c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3 - d. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Dostáváme stejný výsledek jako při vnitřním součinu bodu a roviny, akorát zde roli bodu hraje střed \mathbf{C} sféry \mathbf{S} , takže

$$|\mathbf{S} \cdot \pi| = \delta, \quad (1.65)$$

kde δ je vzdálenost středu \mathbf{C} sféry \mathbf{S} od roviny π . Když $\delta > r$, pak se sféra a rovina nedotýkají, když $\delta = r$, pak se sféra a rovina dotýkají, když $\delta < r$, pak se sféra a rovina protínají.

Rovina a rovina:

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot \pi_2 &= (n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + d_1 e_\infty) \cdot (m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + d_2 e_\infty) \\ &= n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.66)$$

kde α je úhel, který svírají jednotkové normálové vektory rovin \mathbf{n} a \mathbf{m} a tedy i roviny π_1 a π_2 .

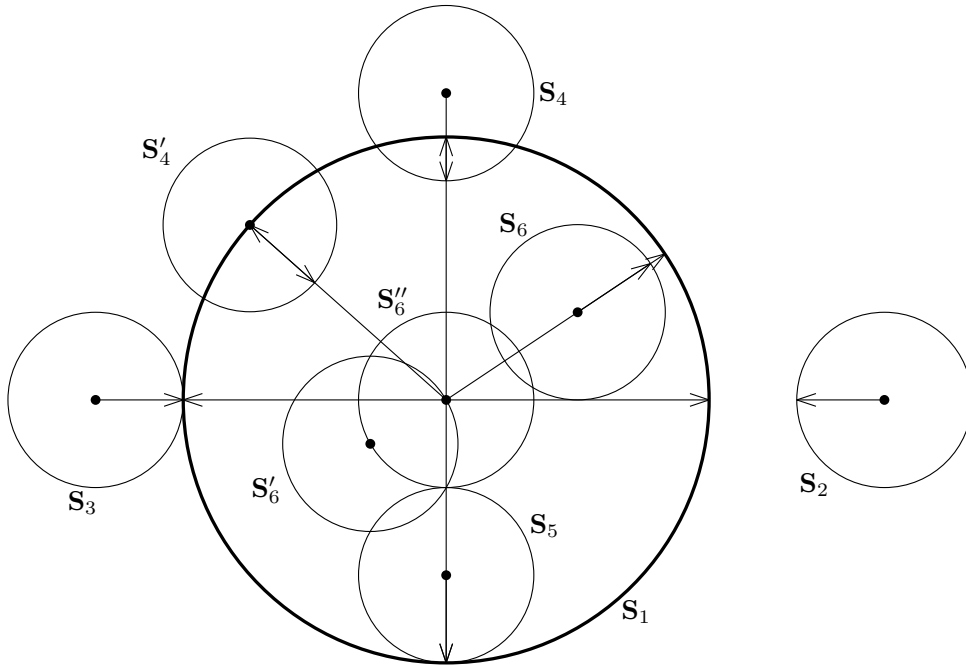
Sféra a sféra:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 &= (\mathbf{C}_1 - \frac{1}{2}r_1^2 \mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{C}_2 - \frac{1}{2}r_2^2 \mathbf{e}_\infty) \\
&= \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 - \frac{1}{2}(\|\mathbf{c}_1\|^2 - r_1^2) - \frac{1}{2}(\|\mathbf{c}_2\|^2 - r_2^2) \\
&= -\frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2),
\end{aligned} \tag{1.67}$$

kde $d \geq 0$ je vzdálenost mezi středy sfér. Platí tedy, že

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2). \tag{1.68}$$

Ze vztahu (1.68) lze vyvodit následující závěr (viz obrázek 3):



Obrázek 3: Vzájemná poloha dvou sfér

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 < -r_1 r_2 &\Rightarrow \text{sféry se nedotýkají, jedna leží vně druhé,} \\
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 = -r_1 r_3 &\Rightarrow \text{vnější dotyk sfér,} \\
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_4 \in (-r_1 r_4, r_1 r_4) &\Rightarrow \text{sféry se protínají,} \\
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_5 = r_1 r_5 &\Rightarrow \text{vnitřní dotyk sfér,} \\
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_6 \in (r_1 r_6, \frac{1}{2}(r_1^2 + r_6^2)) &\Rightarrow \text{sféry se nedotýkají, jedna leží uvnitř druhé.}
\end{aligned}$$

Speciální případy:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}'_4 &= \frac{(\min\{r_1, r'_4\})^2}{2} \Rightarrow \text{Střed menší sféry leží na větší sféře,} \\
\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}'_6 &= \frac{(\max\{r_1, r'_6\})^2}{2} \Rightarrow \text{Střed větší sféry leží na menší sféře,}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_6'' = \frac{1}{2}(r_1^2 + r_6''^2) \Rightarrow \text{soustředné sféry (maximum vnitřního součinu).}$$

Význam vnitřního součinu mezi reprezentacemi odvozených geometrických objektů je shrnut v tabulce 4. Podobnou tabulku lze nalézt v [4].

Vnitřní součin	Bod	Sféra	Rovina
Bod	Vzdálenost	Tečná vzdálenost	Vzdálenost
Sféra		Míra vzdálenosti	Vzdálenost středu sféry od roviny
Rovina			Úhel normálových vektorů rovin

Tabulka 4: Význam vnitřního součinu odvozených geometrických objektů

IPNS reprezentace kružnice, přímky a dvoj bodu

Před odvozením IPNS reprezentace kružnice a přímky nejdříve ukážeme, jaký geometrický význam má pro IPNS reprezentace operace vnější součin. Položme (1.36) rovno nule:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{A}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \wedge \mathbf{A} - \mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) = 0. \quad (1.69)$$

Pokud 1-vektor \mathbf{x} je reprezentací bodu, pak tento bod leží na objektu $\mathbf{y} \wedge \mathbf{A}$. Nechť \mathbf{y} a \mathbf{A} jsou různé nenulové prvky, kde \mathbf{y} je 1-vektor, pak

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \wedge \mathbf{A} - \mathbf{y} \wedge (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \text{ a zároveň } \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (1.70)$$

takže bod \mathbf{x} leží na objektu \mathbf{y} a zároveň na objektu \mathbf{A} . Vnější součin IPNS reprezentaci má tedy za výše uvedených předpokladů význam průniku geometrických objektů (platnost ekvivalence (1.70) je podrobněji rozebrána v [7]).

Poznámka 1.27. Protože IPNS reprezentace sféry i roviny jsou 1-vektory, není podmínka, že \mathbf{y} je 1-vektor, omezující.

Poznámka 1.28. Na následující ukázce je vidět, proč je důležité předpokládat, že \mathbf{y} a \mathbf{A} jsou různé:

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{P} \wedge \mathbf{P} = 0, \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \wedge \mathbf{S} = 0, \quad (1.71)$$

kde \mathbf{P} je libovolný bod, \mathbf{S} je libovolná sféra. Takže když $\mathbf{y} = \mathbf{A}$, pak operace vnitřní součin význam průniku nemá.

Mějme sféry $\mathbf{S}_1 = \mathbf{C}_1 - \frac{1}{2}r_1^2 e_\infty$ a $\mathbf{S}_2 = \mathbf{C}_2 - \frac{1}{2}r_2^2 e_\infty$, které se protínají, takže platí, že $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \in (-r_1 r_2, r_1 r_2)$. Potom je jejich průnikem kružnice \mathbf{Z} , jejíž IPNS reprezentaci získáme následovně:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2. \quad (1.72)$$

IPNS reprezentaci kružnice lze získat také jako průnik sféry \mathbf{S} a roviny π , kde $|\mathbf{S} \cdot \pi| < r$:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S} \wedge \pi. \quad (1.73)$$

Podobně IPNS reprezentaci přímky získáme jako průnik dvou rovin $\pi_1, \pi_2, \pi_1 \cdot \pi_2 \neq \pm 1$:

$$\mathbf{L} = \pi_1 \wedge \pi_2. \quad (1.74)$$

Protože později bude užitečné používat konkrétní (standardní) reprezentaci přímky, rozepišme nyní výraz (1.74):

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= (n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3 + d_1 e_\infty) \wedge (m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + d_2 e_\infty) \\ &= (n_2 m_3 - n_3 m_2) e_2 \wedge e_3 + (n_3 m_1 - n_1 m_3) e_3 \wedge e_1 + (n_1 m_2 - n_2 m_1) e_1 \wedge e_2 \\ &+ (n_1 d_2 - m_1 d_1) e_1 \wedge e_\infty + (n_2 d_2 - m_2 d_1) e_2 \wedge e_\infty + (n_3 d_2 - m_3 d_1) e_3 \wedge e_\infty.\end{aligned}\quad (1.75)$$

Vidíme, že koeficienty u 2-vektorů $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ určují směrový vektor přímky \mathbf{L} v \mathbb{R}^3 , neboť je lze získat vektorovým součinem vektorů \mathbf{n} a \mathbf{m} . Standardní reprezentace přímky bude taková, aby její směrový vektor měl velikost rovnu jedné. Protože platí

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = -(n_2 m_3 - n_3 m_2)^2 - (n_3 m_1 - n_1 m_3)^2 - (n_1 m_2 - n_2 m_1)^2, \quad (1.76)$$

získáme standardní tvar přímky \mathbf{L}_{st} jako

$$\mathbf{L}_{st} = \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{-\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}}. \quad (1.77)$$

Průnikem tří různých navzájem se protínajících sfér získáme dvojici bodů neboli dvoj-bod. IPNS reprezentaci dvojvodu tedy získáme jako

$$\mathbf{P}_P = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3. \quad (1.78)$$

IPNS reprezentaci dvojvodu lze získat také jako průnik dvou protínajících se sfér a jedné roviny, která je protíná, průnik dvou různoběžných rovin a sféry, která je protíná, případně i jako průnik třech různoběžných rovin, v takovém případě je jeden z dvojice bodů bod v nekonečnu.

OPNS reprezentace dvojvodu

Jak bylo řečeno výše, ukážeme, že OPNS reprezentaci objektu lze snadno získat pomocí bodů, které tento objekt určují. Dvojvod je dán dvěma různými body \mathbf{P}_1 a \mathbf{P}_2 , OPNS reprezentace dvojvodu se pak nalezne následovně:

$$\mathbf{P}_P^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2. \quad (1.79)$$

Mějme nějaký bod \mathbf{P} . Je zřejmé, že

$$\text{Když } (\mathbf{P} = \mathbf{P}_1) \text{ nebo } (\mathbf{P} = \mathbf{P}_2), \text{ pak } (\mathbf{P} \wedge \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 = 0). \quad (1.80)$$

Opačnou implikaci lze dokázat po rozepsání členu $\mathbf{P} \wedge \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2$, viz [3].

OPNS reprezentace sféry

Nechť $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$ jsou čtyři různé konečné body, které neleží ve stejné rovině, pak tyto body jednoznačně určují sféru v prostoru. OPNS reprezentaci této sféry získáme následovně:

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{P}_4. \quad (1.81)$$

Nyní ukážeme, jak lze vztah (1.81) odvodit. Rovina souměrnosti dvou bodů \mathbf{P}_1 a \mathbf{P}_2 je ve tvaru $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$ (její IPNS reprezentace, viz (1.57)). Vezměme ještě roviny $\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1$, pak průnikem těchto tří rovin je střed \mathbf{C} sféry \mathbf{S} a bod v nekonečnu e_∞ , tedy

$$kI(\mathbf{C} \wedge e_\infty) = (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \wedge (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \wedge (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1). \quad (1.82)$$

Tvar sféry \mathbf{S} se středem \mathbf{C} , na které leží bod \mathbf{P}_1 lze pomocí vztahů (1.44), (1.45) a (1.36) upravit následovně:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} - \frac{1}{2}r^2e_\infty = \mathbf{C} + (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{C})e_\infty = (\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{C})e_\infty - (\mathbf{P}_1 \cdot e_\infty)\mathbf{C} = \mathbf{P}_1 \cdot (\mathbf{C} \wedge e_\infty). \quad (1.83)$$

Dále už lze pomocí vztahu (1.35) odvodit, že

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^* &= kI(\mathbf{P}_1 \cdot (\mathbf{C} \wedge e_\infty)) = \mathbf{P}_1 \wedge kI(\mathbf{C} \wedge e_\infty) \\ &= \mathbf{P}_1 \wedge (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \wedge (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1) \wedge (\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{P}_4. \end{aligned} \quad (1.84)$$

OPNS reprezentace roviny

Nechť $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ jsou různé konečné body, pak tyto body jednoznačně určují rovinu v prostoru. Dále ukážeme, že OPNS reprezentace roviny je ve tvaru

$$\pi^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge e_\infty. \quad (1.85)$$

Mějme rovinu souměrnosti bodů \mathbf{Q}_1 a \mathbf{Q}_2 , pak $\pi = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2$. Upravme tvar této roviny pomocí vztahů (1.45) a (1.36) následovně:

$$\pi = \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 = (e_\infty \cdot \mathbf{Q}_1) \wedge \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_1 \wedge (e_\infty \cdot \mathbf{Q}_2) = e_\infty \cdot (\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{Q}_2). \quad (1.86)$$

Výraz $\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{Q}_2$ je OPNS reprezentace dvoj bodu. Potřebujeme tedy pomocí bodů $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ a \mathbf{P}_3 nalézt dvoj bod, jehož rovina souměrnosti je rovina π . Tento dvoj bod nalezneme jako průnik tří navzájem se protínajících sfér, jejichž středy jsou body $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ a \mathbf{P}_3 . Nyní už lze za pomoci vztahu (1.35), (1.48) a (1.78) ukázat, že

$$\begin{aligned} \pi^* &= I(e_\infty \cdot (\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{Q}_2)) = I(e_\infty \cdot I(\mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3)) \\ &= -e_\infty \wedge (\mathbf{P}_1 - \frac{1}{2}r_1^2e_\infty) \wedge (\mathbf{P}_2 - \frac{1}{2}r_2^2e_\infty) \wedge (\mathbf{P}_3 - \frac{1}{2}r_3^2e_\infty) \\ &= \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge e_\infty. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Poznámka 1.29. Vzhledem k (1.81) a (1.85) lze na rovinu pohlížet jako na sféru, která protíná bod v nekonečnu.

Kromě určení reprezentace roviny je také důležitá orientace jejího normálového vektoru, kterou popisuje následující věta.

Věta 1.30. *Mějme tři libovolné různé konečné body $\mathbf{P} = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2e_\infty + e_0$, $\mathbf{Q} = q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2e_\infty + e_0$ a $\mathbf{R} = r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{r}\|^2e_\infty + e_0$. Potom normálový vektor roviny*

$$\pi = I(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \wedge \mathbf{R} \wedge e_\infty) \quad (1.88)$$

je orientován ve směru vektoru $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p})$.

Důkaz. Rovnici (1.88) lze roznásobením výrazu na pravé straně upravit na tvar

$$\begin{aligned} \pi &= (p_2q_3 - p_2r_3 + p_3r_2 - p_3q_2 + q_2r_3 - q_3r_2)e_1 \\ &+ (p_1q_3 - p_1r_3 + p_3r_1 - p_3q_1 + q_1r_3 - q_3r_1)e_2 \\ &+ (p_1q_2 - p_1r_2 + p_2r_1 - p_2q_1 + q_1r_2 - q_2r_1)e_3 \\ &+ (p_1q_2r_3 - p_1q_3r_2 - p_2q_1r_3 + p_2q_3r_1 + p_3q_1r_2 - p_3q_2r_1)e_\infty. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Nyní lze snadno ověřit, že koeficienty u prvků báze e_1, e_2, e_3 jsou složky vektoru $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p})$. \square

OPNS reprezentace kružnice a přímky

Nechť $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ a \mathbf{P}_3 jsou tři libovolné různé konečné body, které neleží na stejné přímce, pak tyto body jednoznačně určují kružnici v prostoru. Nechť \mathbf{P}_4 je libovolný konečný bod, který neleží v rovině $\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge e_\infty$. Nechť bod \mathbf{P} leží na kružnici určenou body $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$. Pak tento bod leží na sféře $\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{P}_4$. Platí tedy, že

$$\mathbf{P} \wedge (\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{P}_4) = 0. \quad (1.90)$$

Díky asociativitě vnějšího součinu platí, že

$$(\mathbf{P} \wedge \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3) \wedge \mathbf{P}_4 = 0. \quad (1.91)$$

Pro libovolný bod \mathbf{P}_4 je tato rovnost splněna právě tehdy, když

$$\mathbf{P} \wedge (\mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3) = 0, \quad (1.92)$$

z čehož plyne, že OPNS reprezentace kružnice dané body $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ je tvaru

$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3. \quad (1.93)$$

Analogickým postupem lze ukázat, že OPNS reprezentace přímky, dané body $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$, je tvaru

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge e_\infty. \quad (1.94)$$

Poznámka 1.31. Vzhledem k (1.93) a (1.94) lze na přímku pohlížet jako na kružnici, která prochází bodem v nekonečnu.

O orientaci směrového vektoru přímky hovoří následující věta.

Věta 1.32. *Mějme dva různé libovolné konečné body $\mathbf{P} = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2e_\infty + e_0$ a $\mathbf{Q} = q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{q}\|^2e_\infty + e_0$. Potom směrový vektor přímky*

$$\mathbf{L} = I(\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} \wedge e_\infty) \quad (1.95)$$

je orientován ve směru vektoru $\mathbf{q} - \mathbf{p} = (q_1 - p_1)e_1 + (q_2 - p_2)e_2 + (q_3 - p_3)e_3$.

Důkaz. Rovnici (1.95) lze roznásobením výrazu na pravé straně upravit na tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (q_1 - p_1)e_2 \wedge e_3 + (q_2 - p_2)e_3 \wedge e_1 + (q_3 - p_3)e_1 \wedge e_2 \\ &+ (p_2q_3 - p_3q_2)e_1 \wedge e_\infty + (p_3q_1 - p_1q_3)e_2 \wedge e_\infty + (p_1q_2 - p_2q_1)e_3 \wedge e_\infty. \end{aligned} \quad (1.96)$$

U prvků báze $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ se pak vyskytují koeficienty vektoru $\mathbf{q} - \mathbf{p}$. □

Výčet odvozených reprezentací geometrických objektů

Pro lepší přehlednost jsou v tabulce 5 uvedeny odvozené reprezentace. Podobnou tabulku lze nalézt v [4].

Objekt	IPNS reprezentace	OPNS reprezentace
Bod	$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\ \mathbf{p}\ ^2 e_\infty + e_0$	
Sféra	$\mathbf{S} = \mathbf{P} - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$\mathbf{S}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge \mathbf{P}_4$
Rovina	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3 \wedge e_\infty$
Kružnice	$\mathbf{Z} = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2$	$\mathbf{Z}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge \mathbf{P}_3$
Přímka	$\mathbf{L} = \pi_1 \wedge \pi_2$	$\mathbf{L}^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2 \wedge e_\infty$
Dvojbod	$\mathbf{P}_p = \mathbf{S}_1 \wedge \mathbf{S}_2 \wedge \mathbf{S}_3$	$\mathbf{P}_p^* = \mathbf{P}_1 \wedge \mathbf{P}_2$
	$\mathbf{p} = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$	
	$\mathbf{n} = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3, \quad \ \mathbf{n}\ = 1$	

Tabulka 5: Odvozené reprezentace geometrických objektů

1.4 Geometrické transformace v CGA

Translace

Definice 1.33. Mějme prvek $\mathbf{t} = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3$. *Translátorem* nazveme prvek ve tvaru

$$T = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}e_\infty\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\mathbf{t}e_\infty\right)^i}{i!}. \quad (1.97)$$

Protože platí, že $e_i e_\infty = -e_\infty e_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, a $e_\infty^2 = 0$, lze výraz (1.97) upravit na tvar

$$T = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}e_\infty. \quad (1.98)$$

Mějme translátor T ve tvaru (1.97). *Konjugovaným translátorem* k translátoru T nazveme prvek ve tvaru

$$\tilde{T} = \exp\left(\frac{1}{2}\mathbf{t}e_\infty\right) = 1 + \frac{1}{2}\mathbf{t}e_\infty. \quad (1.99)$$

Věta 1.34. *Nechť \mathbf{O} je standardní IPNS reprezentace geometrického objektu a T je translátor ve tvaru (1.98). Výpočtem*

$$\mathbf{O}_t = T\mathbf{O}\tilde{T} \quad (1.100)$$

získáme IPNS reprezentaci geometrického objektu posunutého o \mathbf{t} . Pokud je \mathbf{O} ve standardním tvaru, pak je i \mathbf{O}_t ve standardním tvaru.

Důkaz. Viz [3]. □

Rotace

Definice 1.35. Nechť \mathbf{L}_{st} je standardní IPNS reprezentace přímky a $\theta \in \mathbb{R}$. *Rotorem* nazveme prvek ve tvaru

$$R = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\mathbf{L}_{st}\right). \quad (1.101)$$

Mějme rotor R ve tvaru (1.101). *Konjugovaným rotorem* k rotoru R nazveme prvek ve tvaru

$$\tilde{R} = \exp\left(\frac{\theta}{2}\mathbf{L}_{st}\right). \quad (1.102)$$

Poznámka 1.36. Rotor R ve tvaru (1.101) lze psát i jako

$$R = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \mathbf{L}_{st} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (1.103)$$

viz [3, 4, 7].

Věta 1.37. *Nechť \mathbf{O} je standardní IPNS reprezentace geometrického objektu a R je rotor ve tvaru (1.101). Výpočtem*

$$\mathbf{O}_R = R\mathbf{O}\tilde{R} \quad (1.104)$$

získáme IPNS reprezentaci geometrického objektu, který obdržíme rotací objektu \mathbf{O} kolem osy \mathbf{L}_{st} o úhel θ v kladném směru. Pokud je \mathbf{O} ve standardním tvaru, pak je i \mathbf{O}_R ve standardním tvaru.

Důkaz. Viz [3]. □

Poznámka 1.38. Kladným směrem rozumíme, že pokud jdeme prsty pravé ruky od směrového vektoru přímky \mathbf{L}_{st} k objektu \mathbf{O} , palec ukazuje směr rotace.

Složená transformace (Rigid-body motion)

Slovní spojení „rigid-body motion” lze do češtiny přeložit jako „pohyb tuhého tělesa”. Touto transformací budeme mít na mysli po sobě jdoucí translaci a rotaci, případně rotaci a translaci.

Definice 1.39. Mějme rotor R a translátor T , prvek ve tvaru

$$M = RT \quad (1.105)$$

nazýváme *motorem* a prvek ve tvaru

$$\tilde{M} = \tilde{T}\tilde{R} \quad (1.106)$$

nazýváme *konjugovaným motorem* k motoru M .

Z vět 1.34 a 1.37 plyne, že reprezentaci objektu \mathbf{O}_M , obdrženého translací a rotací objektu \mathbf{O} , získáme vztahem

$$\mathbf{O}_M = M\mathbf{O}\tilde{M}. \quad (1.107)$$

2 Robotický manipulátor UR10

Robotický manipulátor UR10 od firmy Universal Robots je určen k fyzické manipulaci komponent ve výrobním procesu, čímž přispívá k jeho automatizaci. UR10 svým tvarem a pohybem připomíná lidskou paži, proto se někdy označuje jako robotické rameno. Má možnost rotačního pohybu v šesti kloubech (viz tabulka technických parametrů a obrázek 4 - fialově vyznačeny osy rotace, kde každá protíná k ní příslušný kloub). Technické parametry jsou převzaty z [10].

Specifikace:

Užitečné zatížení	10 kg
Dosah	130 cm
Stupně volnosti	6 otočných kloubů

Pohyb:

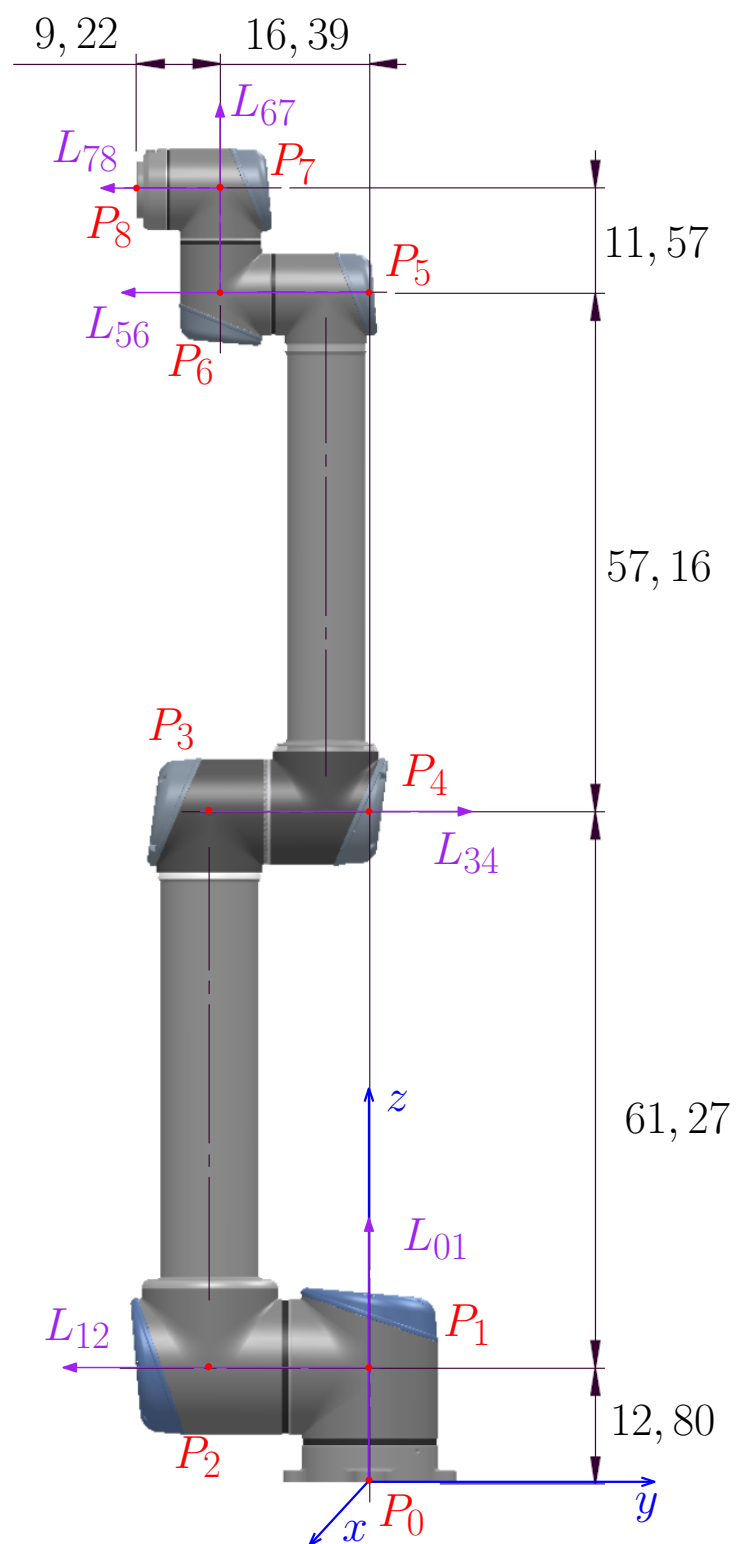
Pohyb os robotického ramena	Pracovní rozsah	Maximální rychlost	Osa
Podstavec	$\pm 360^\circ$	$\pm 120^\circ/s$	L_{01}
Rameno	$\pm 360^\circ$	$\pm 120^\circ/s$	L_{12}
Loket	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	L_{34}
Zápěstí 1	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	L_{56}
Zápěstí 2	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	L_{67}
Zápěstí 3	$\pm 360^\circ$	$\pm 180^\circ/s$	L_{78}

Tabulka 6: Vybrané technické parametry

Pozici manipulátoru na obrázku 4 budeme uvažovat jako počáteční polohu. Tuto polohu popíšeme pomocí červeně označených bodů P_0 až P_8 . Souřadnice těchto bodů ve vyznačeném systému jsou uvedeny v tabulce 7. Hodnoty jsou určeny v centimetrech dle rozměrů na obrázku 4. Hodnotu parametru $a > 0$ (viz tabulka 7) můžeme pro naše úvahy určit libovolně. Dále budeme volit $a = 20$.

Bod	Souřadnice v systému $[x; y; z]$
P_0	$[0; 0; 0]$
P_1	$[0; 0; 12, 80]$
P_2	$[0; -a; 12, 80]$
P_3	$[0, -a, 74, 07]$
P_4	$[0; 0; 74, 07]$
P_5	$[0; 0; 131, 23]$
P_6	$[0; -16, 39; 131, 23]$
P_7	$[0; -16, 39; 142, 80]$
P_8	$[0; -25, 61; 142, 80]$

Tabulka 7: Počáteční pozice



Obrázek 4: Robotický manipulátor UR10 v počáteční pozici, modře souřadný systém, fialově osy rotace, červeně body popisující polohu stroje. Původní obrázek převzat od Universal Robots.

3 Dopředná kinematika manipulátoru UR10

Mějme manipulátor v počáteční pozici (viz obrázek 4 a tabulka 7). Úkolem je určit výslednou pozici manipulátoru po provedení rotačního pohybu o nějaký úhel v daném rozsahu v každém kloubu. Tyto úhly označme postupně $\theta_{01}, \theta_{12}, \theta_{34}, \theta_{56}, \theta_{67}, \theta_{78}$, přičemž každý úhel odpovídá ose rotace se stejným indexem. Výsledná pozice je pak určena pomocí bodů $\tilde{\mathbf{P}}_i$, $i \in \{0, 1, \dots, 8\}$, kde bod $\tilde{\mathbf{P}}_i$ značí výslednou polohu části stroje označené v počáteční pozici bodem \mathbf{P}_i .

Bod \mathbf{P}_0 je pevně ztotožněn s počátkem, bodu \mathbf{P}_1 se pohybem pozice nezmění, proto

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0, \quad (3.1)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_1. \quad (3.2)$$

Osu rotace $\tilde{\mathbf{L}}_{01}$ a k ní příslušný rotor R_{01} určíme jako

$$\tilde{\mathbf{L}}_{01}^* = \tilde{\mathbf{P}}_0 \wedge \tilde{\mathbf{P}}_1 \wedge e_\infty, \quad (3.3)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{01} = \frac{I\tilde{\mathbf{L}}_{01}^*}{\sqrt{-I\tilde{\mathbf{L}}_{01}^* \cdot I\tilde{\mathbf{L}}_{01}^*}}, \quad (3.4)$$

$$R_{01} = \exp\left(-\frac{\theta_{01}}{2}\tilde{\mathbf{L}}_{01}\right), \quad (3.5)$$

výslednou polohu bodu $\tilde{\mathbf{P}}_2$ pak získáme jako rotaci bodu \mathbf{P}_2 kolem osy $\tilde{\mathbf{L}}_{01}$ o úhel θ_{01} (viz (1.101) a věta 1.37):

$$\tilde{\mathbf{P}}_2 = R_{01}\mathbf{P}_2\tilde{R}_{01}. \quad (3.6)$$

Poznámka 3.1. $\tilde{\mathbf{L}}_{01}^*$ je OPNS reprezentace přímky určené body $\tilde{\mathbf{P}}_0$ a $\tilde{\mathbf{P}}_1$, $I\tilde{\mathbf{L}}_{01}^*$ je IPNS reprezentace téže přímky a $\tilde{\mathbf{L}}_{01}$ je její standardní IPNS reprezentace (viz (1.77)).

Obdobně určíme osu $\tilde{\mathbf{L}}_{12}$ a k ní příslušný rotor R_{12} .

$$\tilde{\mathbf{L}}_{12}^* = \tilde{\mathbf{P}}_1 \wedge \tilde{\mathbf{P}}_2 \wedge e_\infty, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{12} = \frac{I\tilde{\mathbf{L}}_{12}^*}{\sqrt{-I\tilde{\mathbf{L}}_{12}^* \cdot I\tilde{\mathbf{L}}_{12}^*}}, \quad (3.8)$$

$$R_{12} = \exp\left(-\frac{\theta_{12}}{2}\tilde{\mathbf{L}}_{12}\right). \quad (3.9)$$

Polohu bodů $\tilde{\mathbf{P}}_3$ a $\tilde{\mathbf{P}}_4$ pak získáme jako

$$\tilde{\mathbf{P}}_3 = R_{12}R_{01}\mathbf{P}_3\tilde{R}_{01}\tilde{R}_{12}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_4 = R_{12}R_{01}\mathbf{P}_4\tilde{R}_{01}\tilde{R}_{12}. \quad (3.11)$$

Poznámka 3.2. Vyjádření (3.10), resp. (3.11) znamená, že nejdříve je provedena rotace bodu \mathbf{P}_3 , resp. \mathbf{P}_4 kolem osy $\tilde{\mathbf{L}}_{01}$ o úhel θ_{01} a následně rotace kolem osy $\tilde{\mathbf{L}}_{12}$ o úhel θ_{12} . U vyjádření výsledné polohy dalších bodů budou přibývat další rotory určující rotaci kolem dalších os.

Analogicky pak určíme osu $\tilde{\mathbf{L}}_{34}$ a rotor R_{34} jako

$$\tilde{\mathbf{L}}_{34}^* = \tilde{\mathbf{P}}_3 \wedge \tilde{\mathbf{P}}_4 \wedge e_\infty, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{34} = \frac{I\tilde{\mathbf{L}}_{34}^*}{\sqrt{-I\tilde{\mathbf{L}}_{34}^* \cdot I\tilde{\mathbf{L}}_{34}^*}}, \quad (3.13)$$

$$R_{34} = \exp\left(-\frac{\theta_{34}}{2}\tilde{\mathbf{L}}_{34}\right), \quad (3.14)$$

a polohu bodů $\tilde{\mathbf{P}}_5$ a $\tilde{\mathbf{P}}_6$ jako

$$\tilde{\mathbf{P}}_5 = R_{34}R_{12}R_{01}\mathbf{P}_5\tilde{R}_{01}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{34}, \quad (3.15)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_6 = R_{34}R_{12}R_{01}\mathbf{P}_6\tilde{R}_{01}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{34}. \quad (3.16)$$

Dále

$$\tilde{\mathbf{L}}_{56}^* = \tilde{\mathbf{P}}_5 \wedge \tilde{\mathbf{P}}_6 \wedge e_\infty, \quad (3.17)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{56} = \frac{I\tilde{\mathbf{L}}_{56}^*}{\sqrt{-I\tilde{\mathbf{L}}_{56}^* \cdot I\tilde{\mathbf{L}}_{56}^*}}, \quad (3.18)$$

$$R_{56} = \exp\left(-\frac{\theta_{56}}{2}\tilde{\mathbf{L}}_{56}\right), \quad (3.19)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_7 = R_{56}R_{34}R_{12}R_{01}\mathbf{P}_7\tilde{R}_{01}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{34}\tilde{R}_{56}. \quad (3.20)$$

Dále

$$\tilde{\mathbf{L}}_{67}^* = \tilde{\mathbf{P}}_6 \wedge \tilde{\mathbf{P}}_7 \wedge e_\infty, \quad (3.21)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{67} = \frac{I\tilde{\mathbf{L}}_{67}^*}{\sqrt{-I\tilde{\mathbf{L}}_{67}^* \cdot I\tilde{\mathbf{L}}_{67}^*}}, \quad (3.22)$$

$$R_{67} = \exp\left(-\frac{\theta_{67}}{2}\tilde{\mathbf{L}}_{67}\right), \quad (3.23)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_8 = R_{67}R_{56}R_{34}R_{12}R_{01}\mathbf{P}_8\tilde{R}_{01}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{34}\tilde{R}_{56}\tilde{R}_{67}. \quad (3.24)$$

Takto jsme vyjádřili výslednou polohu manipulátoru. Manipulátor má ještě možnost pohybu v ose $\tilde{\mathbf{L}}_{78}$, tento pohyb má význam, je-li k manipulátoru připojen nějaký nástavec, který může například uchopit nějaký objekt. Tuto osu a k ní příslušný rotor pak analogicky vyjádříme jako

$$\tilde{\mathbf{L}}_{78}^* = \tilde{\mathbf{P}}_7 \wedge \tilde{\mathbf{P}}_8 \wedge e_\infty, \quad (3.25)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{78} = \frac{I\tilde{\mathbf{L}}_{78}^*}{\sqrt{-I\tilde{\mathbf{L}}_{78}^* \cdot I\tilde{\mathbf{L}}_{78}^*}}, \quad (3.26)$$

$$R_{78} = \exp\left(-\frac{\theta_{78}}{2}\tilde{\mathbf{L}}_{78}\right). \quad (3.27)$$

Tím je úloha dopředné kinematiky vyřešena.

4 Rekonstrukce 3D scény pomocí dvou kamer

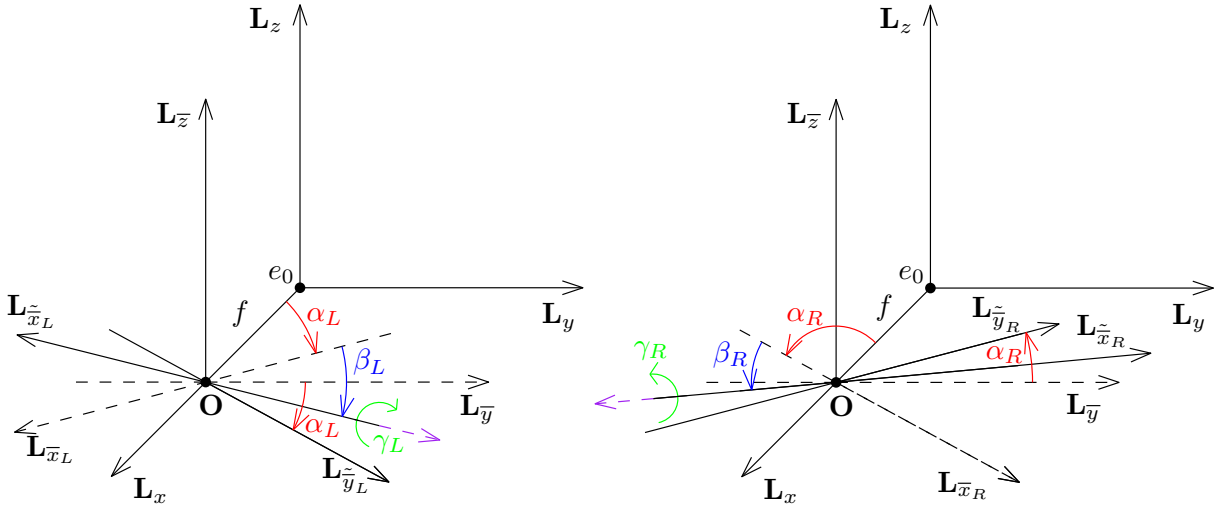
4.1 Rekonstrukce reálné polohy stroje

V této sekci bude naším cílem na základě záznamu ze dvou kamer určit pozici manipulátoru UR10. Vstupními parametry této úlohy jsou umístění ohnisek levé a pravé kamery $\mathbf{O}_L = [o_{L1}, o_{L2}, o_{L3}] \equiv o_{L1}e_1 + o_{L2}e_2 + o_{L3}e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{o}_L\|^2 + e_0$, $\mathbf{O}_R = [o_{R1}, o_{R2}, o_{R3}] \equiv o_{R1}e_1 + o_{R2}e_2 + o_{R3}e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{o}_R\|^2 + e_0$, parametry $\alpha_L, \beta_L, \gamma_L$ popisující natočení levé kamery, kde postupně úhel α_L popisuje rotaci kolem vertikální osy, úhel β_L rotaci kolem horizontální osy a úhel γ_L rotaci kolem předozadní osy, analogicky pak natočení pravé kamery popisují parametry $\alpha_R, \beta_R, \gamma_R$.

Poznámka 4.1. Vertikální, horizontální a předozadní osy uvažujeme fixované k levé, resp. pravé kameře - procházejí jejím ohniskem a pohybují se společně s kamerou.

Vstupními parametry, které popisují vlastnosti kamer, jsou také jejich ohniskové vzdálenosti f_L, f_R (vzdálenost kamer od promítací roviny), pro jednoduchost uvažujme, že $f_L = f_R = f$. Dalšími vstupními parametry jsou obrazy bodů $\tilde{\mathbf{P}}_i$ na promítacích rovinách π_{prL} a π_{prR} , $i \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$, na levé promítací rovině π_{prL} tyto obrazy označíme \mathbf{P}_{iL} , na pravé promítací rovině π_{prR} pak tyto obrazy označíme \mathbf{P}_{iR} .

Poznámka 4.2. Obrazy \mathbf{P}_{iL} a \mathbf{P}_{iR} bodu $\tilde{\mathbf{P}}_i$ nemusí vždy existovat. Může dojít například k překrytí tohoto bodu. Pak se tento bod na jednu z rovin (nebo na obě) nepromítne a neexistuje tedy záznam \mathbf{P}_{iL} , resp. \mathbf{P}_{iR} (resp. ani jeden z těchto záznamů). Existují pak situace, kdy lze i přesto nalézt skutečnou polohu bodu $\tilde{\mathbf{P}}_i$, ale také situace, kdy poloha tohoto bodu nalézt nelze. V praxi lze tento problém řešit například snímáním stroje další kamerou. V následujícím postupu se těmito singulárními případy nebudeme zabývat a budeme předpokládat, že všechny obrazy \mathbf{P}_{iL} a \mathbf{P}_{iR} existují.



Obrázek 5: Natočení levé, resp. pravé kamery pomocí úhlů $\alpha_L, \beta_L, \gamma_L$, resp. $\alpha_R, \beta_R, \gamma_R$, fialově vyznačeny směry pohledu kamer

Prvním krokem je umístění ohnisek kamer a záznamů promítacích rovin do prostoru. Záznamy na promítacích rovinách umístíme nejdříve do roviny $\pi_{yz} = e_1$ a ohniska kamer do bodu $\mathbf{O} = fe_1 + \frac{1}{2}f^2e_\infty + e_0$. Nyní je třeba určit pomocí parametrů

$o_{L1}, o_{L2}, o_{L3}, f, \alpha_L, \beta_L, \gamma_L$ motor $M_L = T_L R_L$ realizující geometrickou transformaci, po které budou ohnisko levé kamery a záznamy z levé promítací roviny v odpovídající pozici v prostoru, podobně pak pomocí parametrů $o_{R1}, o_{R2}, o_{R3}, f, \alpha_R, \beta_R, \gamma_R$ motor $M_R = T_R R_R$, realizující geometrickou transformaci ohniska pravé kamery a záznamů z pravé promítací roviny. Natočení kamer pomocí výše uvedených parametrů je znázorněno na obrázku 5.

Poznámka 4.3. Při výpočtu rekonstrukce 3D scény například v [5] se předpokládá, že rotace kamer R_L a R_R jsou již známé. Technik v praxi může však většinou nastavovat kamery pomocí úhlů $\alpha_L, \beta_L, \gamma_L$, resp. $\alpha_R, \beta_R, \gamma_R$, v tomto textu proto natočení levé, resp. pravé kamery odvozujeme právě pomocí těchto parametrů.

Nejdříve označme $\mathbf{E}_1 = e_1 + \frac{1}{2}e_\infty + e_0$, $\mathbf{E}_2 = e_2 + \frac{1}{2}e_\infty + e_0$, $\mathbf{E}_3 = e_3 + \frac{1}{2}e_\infty + e_0$. Osu z získáme jako

$$\mathbf{L}_z = I(e_0 \wedge \mathbf{E}_3 \wedge e_\infty). \quad (4.1)$$

Poznámka 4.4. Osa \mathbf{L}_z je orientovaná ve směru vektoru e_3 (viz věta 1.32).

Tuto osu posuneme do bodu \mathbf{O} pomocí translátoru $T = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}e_\infty$, kde $\mathbf{t} = fe_1$, a převedeme do standardního tvaru:

$$\mathbf{L}_{\bar{z}} = T\mathbf{L}_z\tilde{T}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{z}ST} = \frac{\mathbf{L}_{\bar{z}}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\bar{z}} \cdot \mathbf{L}_{\bar{z}}}}. \quad (4.3)$$

Dále určíme rotor realizující rotaci levé kamery kolem vertikální osy $\mathbf{L}_{\bar{z}ST}$ o úhel α_L v záporném směru a rotor realizující rotaci pravé kamery kolem této vertikální osy o úhel α_R v kladném směru (viz poznámka 1.38):

$$R_{z_L} = \exp\left(\frac{\alpha_L}{2}\mathbf{L}_{\bar{z}ST}\right), \quad (4.4)$$

$$R_{z_R} = \exp\left(-\frac{\alpha_R}{2}\mathbf{L}_{\bar{z}ST}\right). \quad (4.5)$$

Dále posuneme přímkou $\mathbf{L}_y = I(e_0 \wedge \mathbf{E}_2 \wedge e_\infty)$ translátorem T a budeme ji rotovat pomocí rotoru R_{z_L} , resp. R_{z_R} - aby horizontální osa zůstala fixovaná ke kameře:

$$\mathbf{L}_{\bar{y}} = T\mathbf{L}_y\tilde{T}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{y}_L} = R_{z_L}\mathbf{L}_{\bar{y}}\tilde{R}_{z_L}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{y}_R} = R_{z_R}\mathbf{L}_{\bar{y}}\tilde{R}_{z_R}. \quad (4.8)$$

Dále určíme rotory realizující rotaci kolem horizontální osy $\mathbf{L}_{\bar{y}_L}$, resp. $\mathbf{L}_{\bar{y}_R}$ o úhel β_L , resp. β_R v záporném směru:

$$\mathbf{L}_{\bar{y}_L,ST} = \frac{\mathbf{L}_{\bar{y}_L}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\bar{y}_L} \cdot \mathbf{L}_{\bar{y}_L}}}, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{y}_R,ST} = \frac{\mathbf{L}_{\bar{y}_R}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\bar{y}_R} \cdot \mathbf{L}_{\bar{y}_R}}}, \quad (4.10)$$

$$R_{y_L} = \exp\left(\frac{\beta_L}{2}\mathbf{L}_{\bar{y}_L,ST}\right), \quad (4.11)$$

$$R_{y_R} = \exp\left(\frac{\beta_R}{2} \mathbf{L}_{\tilde{y}_{L,ST}}\right). \quad (4.12)$$

Nyní budeme rotovat osu $\mathbf{L}_x = I(e_0 \wedge \mathbf{E}_1 \wedge e_\infty)$ pomocí rotorů R_{z_L} a R_{y_L} , resp. pomocí rotorů R_{z_R} a R_{y_R} , a poté určíme rotor realizující rotaci kolem této předozadní osy levé, resp. pravé kamery o úhel γ_L , resp. γ_R v záporném, resp. kladném směru:

$$\mathbf{L}_{\bar{x}_L} = R_{z_L} \mathbf{L}_x \tilde{R}_{z_L}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_L} = R_{y_L} \mathbf{L}_{\bar{x}_L} \tilde{R}_{y_L}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_{L,st}} = \frac{\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_L}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_L} \cdot \mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_L}}}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{L}_{\bar{x}_R} = R_{z_R} \mathbf{L}_x \tilde{R}_{z_R}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_R} = R_{y_R} \mathbf{L}_{\bar{x}_R} \tilde{R}_{y_R}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_{R,st}} = \frac{\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_R}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_R} \cdot \mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_R}}}, \quad (4.18)$$

$$R_{x_L} = \exp\left(\frac{\gamma_L}{2} \mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_{L,st}}\right), \quad (4.19)$$

$$R_{x_R} = \exp\left(-\frac{\gamma_R}{2} \mathbf{L}_{\tilde{\bar{x}}_{R,st}}\right). \quad (4.20)$$

Poznámka 4.5. Levá, resp. pravá kamera míří v záporném směru osy $\mathbf{L}_{\bar{x}_L}$, resp. $\mathbf{L}_{\bar{x}_R}$ (viz obrázek 5).

Nakonec určíme translátory realizující posunutí do odpovídající pozice:

$$\mathbf{t}_L = (o_{L1} - f)e_1 + o_{L2}e_2 + o_{L3}e_3, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{t}_R = (o_{R1} - f)e_1 + o_{R2}e_2 + o_{R3}e_3, \quad (4.22)$$

$$T_L = 1 - \frac{1}{2} \mathbf{t}_L e_\infty, \quad (4.23)$$

$$T_R = 1 - \frac{1}{2} \mathbf{t}_R e_\infty. \quad (4.24)$$

Výsledné motory M_L a M_R pak získáme jako

$$M_L = T_L R_{x_L} R_{y_L} R_{z_L}, \quad (4.25)$$

$$M_R = T_R R_{x_R} R_{y_R} R_{z_R}, \quad (4.26)$$

a motory k nim konjugované jako

$$\tilde{M}_L = \tilde{R}_{z_L} \tilde{R}_{y_L} \tilde{R}_{x_L} \tilde{T}_L, \quad (4.27)$$

$$\tilde{M}_R = \tilde{R}_{z_R} \tilde{R}_{y_R} \tilde{R}_{x_R} \tilde{T}_R. \quad (4.28)$$

Záznamy obrazů pak umístíme pomocí motorů M_L a M_R do prostoru následovně:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{iL} = M_L \mathbf{P}_{iL} \tilde{M}_L, \quad (4.29)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{iR} = M_R \mathbf{P}_{iR} \tilde{M}_R. \quad (4.30)$$

Poznámka 4.6. Platí, že

$$\mathbf{O}_L = M_L \mathbf{O} \tilde{M}_L = T_L \mathbf{O} \tilde{T}_L, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{O}_R = M_R \mathbf{O} \tilde{M}_R = T_R \mathbf{O} \tilde{T}_R. \quad (4.32)$$

Dále na základě záznamů umístěných v prostoru nalezneme reálnou polohu bodů. Protože podstavec manipulátoru je pevně umístěný a nepohybuje se, platí, že

$$\tilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0. \quad (4.33)$$

Dále zavedme roviny

$$\pi_{i,i+1,L} = I(\mathbf{O}_L \wedge \tilde{\mathbf{P}}_{iL} \wedge \tilde{\mathbf{P}}_{(i+1)L} \wedge e_\infty), \quad (4.34)$$

$$\pi_{i,i+1,R} = I(\mathbf{O}_R \wedge \tilde{\mathbf{P}}_{iR} \wedge \tilde{\mathbf{P}}_{(i+1)R} \wedge e_\infty), \quad i \in \{0, 1, \dots, 7\}. \quad (4.35)$$

Bod $\tilde{\mathbf{P}}_i$, $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ je průsečík rovin z množiny $\Pi_i = \{\pi_{i-1,i,L}, \pi_{i,i+1,L}, \pi_{i-1,i,R}, \pi_{i,i+1,R}\}$ (viz obrázek 6). Konformní geometrická algebra umožňuje nalézt průsečík třech rovin ve tvaru dvoj bodu, kde druhým bodem je e_∞ .

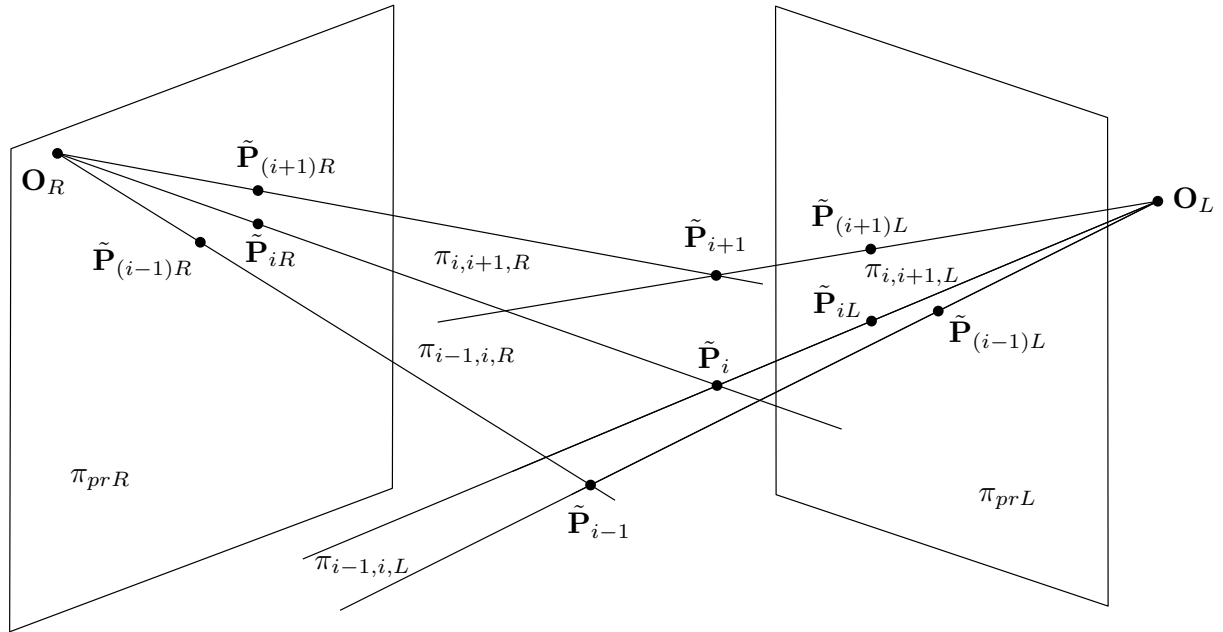
$$c(\tilde{\mathbf{P}}_i \wedge e_\infty) = I(\pi_{i1} \wedge \pi_{i2} \wedge \pi_{i3}), \quad (4.36)$$

kde

$$c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \pi_{i1}, \pi_{i2}, \pi_{i3} \in \Pi_i, \pi_{ij} \wedge \pi_{ik} \neq 0, j, k \in \{1, 2, 3\}, j \neq k. \quad (4.37)$$

Známe-li $c(\tilde{\mathbf{P}}_i \wedge e_\infty)$, lze souřadnice bodu $\tilde{\mathbf{P}}_i$ snadno zjistit, protože

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_i \wedge e_\infty &= (p_{i1}e_1 + p_{i2}e_2 + p_{i3}e_3 + \frac{1}{2}\|\mathbf{p}_i\|^2e_\infty + e_0) \wedge e_\infty \\ &= p_{i1}e_1 \wedge e_\infty + p_{i2}e_2 \wedge e_\infty + p_{i3}e_3 \wedge e_\infty + e_0 \wedge e_\infty. \end{aligned} \quad (4.38)$$



Obrázek 6: Rekonstrukce polohy bodů $\tilde{\mathbf{P}}_i$ v prostoru

Poznámka 4.7. Množina $\Pi_i = \{\pi_{i-1,i,L}, \pi_{i,i+1,L}, \pi_{i-1,i,R}, \pi_{i,i+1,R}\}$ obsahuje čtyři roviny, které se protínají v jednom bodě (viz obrázek 6). Obecně však čtyři roviny v prostoru společný bod mít nemusejí. V praxi se tedy může stát, že pokud poloha kamer není přesně taková, jakou uvažujeme, získáme tímto postupem více možností polohy bodu $\tilde{\mathbf{P}}_i$. Skutečnou polohu bodu $\tilde{\mathbf{P}}_i$ je pak nutné odhadnout vhodnou aproximací.

Poznámka 4.8. Podmínka $\pi_{ij} \wedge \pi_{ik} \neq 0$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq k$ ve (4.37) zajišťuje, aby tři ze čtyř vybraných rovin z množiny Π_i byly různé. Dvě roviny z této množiny by byly stejné například v situaci, kdyby body $\tilde{\mathbf{P}}_i, \tilde{\mathbf{P}}_{i+1}, \mathbf{O}_L$ a \mathbf{O}_R ležely ve stejné rovině.

Bod $\tilde{\mathbf{P}}_8$ leží v rovinách $\pi_{7,8,L}, \pi_{7,8,R}$ a na přímkách

$$\mathbf{L}_{8,L} = I(\mathbf{O}_L \wedge \tilde{\mathbf{P}}_{8L} \wedge e_\infty), \quad (4.39)$$

$$\mathbf{L}_{8,R} = I(\mathbf{O}_R \wedge \tilde{\mathbf{P}}_{8R} \wedge e_\infty). \quad (4.40)$$

Dvojbod $\tilde{\mathbf{P}}_8 \wedge e_\infty$ pak nalezneme jako

$$c(\tilde{\mathbf{P}}_8 \wedge e_\infty) = I(\mathbf{L}_{8,L} \wedge \pi_{7,8,R}) \quad (4.41)$$

nebo jako

$$c(\tilde{\mathbf{P}}_8 \wedge e_\infty) = I(\mathbf{L}_{8,R} \wedge \pi_{7,8,L}). \quad (4.42)$$

Nalezli jsme všechny body $\tilde{\mathbf{P}}_i, i \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$, známe tedy polohu stroje v prostoru.

4.2 Inverzní rekonstrukce

V předchozím i následujícím problému jsou vstupními parametry záznamy \mathbf{P}_{iL} a \mathbf{P}_{iR} , $i \in \{0, 1, \dots, 8\}$. Pokud bychom tyto záznamy chtěli vygenerovat v nějakém programu a následně je analyzovat, bylo by žádoucí, aby odpovídaly přípustné pozici stroje. Proto v této části uvedeme pomocnou proceduru, kde na základě reálné polohy stroje (tedy bodů $\tilde{\mathbf{P}}_i$) a pozice levé a pravé kamery (tedy motorů M_L a M_R) tyto záznamy nalezneme.

Nejdříve umístíme promítací rovinu π_{yz} do prostoru pomocí motoru M_L , resp. M_R :

$$\pi_{yz} = e_1, \quad (4.43)$$

$$\tilde{\pi}_{yz,L} = M_L \pi_{yz} \tilde{M}_L, \quad (4.44)$$

$$\tilde{\pi}_{yz,R} = M_R \pi_{yz} \tilde{M}_R. \quad (4.45)$$

Dále určíme přímky spojující už v prostoru umístěné ohnisko levé, resp. pravé kamery a bodů $\tilde{\mathbf{P}}_i$ popisujících skutečnou polohu stroje:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{O}_L \tilde{\mathbf{P}}_i} = I(\mathbf{O}_L \wedge \tilde{\mathbf{P}}_i \wedge e_\infty), \quad (4.46)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R \tilde{\mathbf{P}}_i} = I(\mathbf{O}_R \wedge \tilde{\mathbf{P}}_i \wedge e_\infty). \quad (4.47)$$

Průsečíky těchto přímek s promítacími rovinami $\tilde{\pi}_{yz,L}$ a $\tilde{\pi}_{yz,R}$ určíme snadno z rovnic

$$c(\tilde{\mathbf{P}}_{iL} \wedge e_\infty) = \mathbf{L}_{\mathbf{O}_L \tilde{\mathbf{P}}_i} \wedge \tilde{\pi}_{yz,L}, \quad (4.48)$$

$$c(\tilde{\mathbf{P}}_{iR} \wedge e_\infty) = \mathbf{L}_{\mathbf{O}_R \tilde{\mathbf{P}}_i} \wedge \tilde{\pi}_{yz,R}. \quad (4.49)$$

Body $\tilde{\mathbf{P}}_{iL}$, resp. $\tilde{\mathbf{P}}_{iR}$ pak transformujeme pomocí motoru \tilde{M}_L , resp. \tilde{M}_R :

$$\mathbf{P}_{iL} = \tilde{M}_L \tilde{\mathbf{P}}_{iL} M_L, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{P}_{iR} = \tilde{M}_R \tilde{\mathbf{P}}_{iR} M_R. \quad (4.51)$$

Tím jsme získali záznamy \mathbf{P}_{iL} a \mathbf{P}_{iR} .

5 Inverzní úloha - nalezení polohy kamer

V této části bude cílem pomocí záznamů $\mathbf{P}_{iL}, \mathbf{P}_{iR}$, $i \in \{0, 1, \dots, 8\}$ na promítacích rovinách a vlastností stroje (rozměrů a možností pohybu) určit vzájemnou polohu kamer vůči sobě a následně určit možnosti jejich umístění. Uvažujme souřadný systém pro levou, resp. pravou kameru, kde její ohnisko je umístěno do bodu $\mathbf{O} = f\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}f^2\mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_0$ a její záznamy $\mathbf{P}_{iL}, \mathbf{P}_{iR}$ promítnuty v rovině $\pi_{yz} = \mathbf{e}_1$. V následujícím postupu se snažíme nalézt rotor $R_{ROT} = \exp(-\frac{\alpha_{ROT}}{2}\mathbf{L}_{ROT,st})$, který popisuje natočení souřadných systémů vůči sobě, a translátor T_{TRANS} popisující jejich vzájemné posunutí. Výsledný motor $M_v = T_{TRANS}R_{ROT}$, resp. $\tilde{M}_v = \tilde{R}_{ROT}\tilde{T}_{TRANS}$ pak bude převádět reprezentace geometrických objektů z jednoho souřadného systému do druhého.

Poznámka 5.1. Každý geometrický objekt v předešlých i následujících postupech má své jednoznačné označení včetně jeho standardní reprezentace. Důvodem je, aby nevznikly nejasnosti, které se vyskytují třeba v [4], kdy není například jasné, že přímka určující rotaci musí být ve standardním tvaru. Těmto nepřesnostem se tímto snažíme vyhnout, nevýhodou je, že při komplikovanějším problému se u označení objektů vyskytují rozsáhlé indexy, které mohou působit nepřehledně. Na druhou stranu většina indexů nese nějakou informaci o objektu, takže objekty lze pak snadněji identifikovat. Například $\mathbf{L}_{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}$ je přímka spojující body \mathbf{P}_1 a \mathbf{P}_2 , $\mathbf{L}_{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, st}$ je její standardní reprezentace, $d_{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2}$ je vzdálenost mezi těmito dvěma body, vyskytuje-li se v indexu L , resp. R , objekt má často nějakou souvislost s levou, resp. pravou kamerou, atd.

5.1 Vzájemné natočení kamer

Pro určení polohy kamer využijeme toho, že body $\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3, \tilde{\mathbf{P}}_4$ tvoří vzhledem k možnostem pohybu stroje a jeho rozměrům vždy obdélník v prostoru (viz obrázek 4). Průsečík přímk $I(\mathbf{P}_{1L} \wedge \mathbf{P}_{3L} \wedge \mathbf{e}_\infty)$ a $I(\mathbf{P}_{2L} \wedge \mathbf{P}_{4L} \wedge \mathbf{e}_\infty)$, resp. $I(\mathbf{P}_{1R} \wedge \mathbf{P}_{3R} \wedge \mathbf{e}_\infty)$ a $I(\mathbf{P}_{2R} \wedge \mathbf{P}_{4R} \wedge \mathbf{e}_\infty)$ (průsečík obrazů úhlopříček obdélníka) je tedy obraz středu \mathbf{S} obdélníka $\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3, \tilde{\mathbf{P}}_4$ (viz obrázek 7). Vzájemné natočení kamer určíme pomocí směrových vektorů úhlopříček obdélníka $\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3, \tilde{\mathbf{P}}_4$ (tedy normálových vektorů rovin souměrnosti $\tilde{\mathbf{P}}_3 - \tilde{\mathbf{P}}_1$ a $\tilde{\mathbf{P}}_4 - \tilde{\mathbf{P}}_2$) v souřadném systému pro levou a pravou kameru.

Bud'me v souřadném systému levé kamery. Nejdříve nalezneme rovinu

$$\pi_{13,L} = I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{1L} \wedge \mathbf{P}_{3L} \wedge \mathbf{e}_\infty), \quad (5.1)$$

$$\pi_{13,L,st} = \frac{\pi_{13,L}}{\sqrt{\pi_{13,L} \cdot \pi_{13,L}}}, \quad (5.2)$$

rovinu

$$\pi_{24,L} = I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{2L} \wedge \mathbf{P}_{4L} \wedge \mathbf{e}_\infty), \quad (5.3)$$

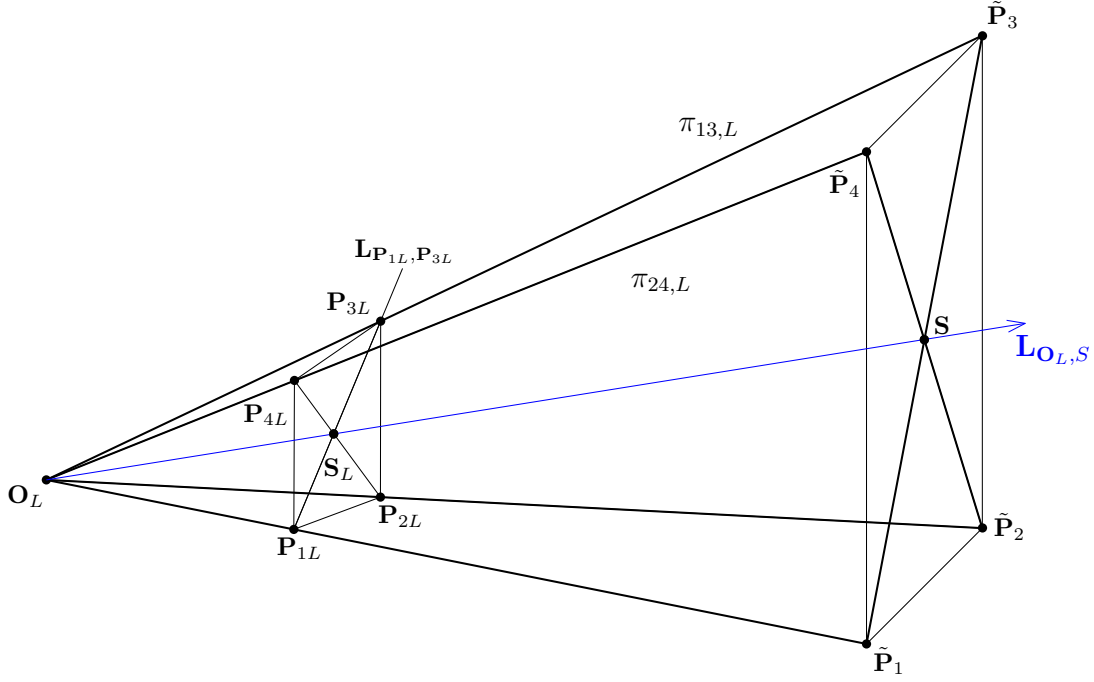
$$\pi_{24,L,st} = \frac{\pi_{24,L}}{\sqrt{\pi_{24,L} \cdot \pi_{24,L}}}, \quad (5.4)$$

a přímku

$$\mathbf{L}_{\mathbf{P}_{1L}, \mathbf{P}_{3L}} = I(\mathbf{P}_{1L} \wedge \mathbf{P}_{3L} \wedge \mathbf{e}_\infty). \quad (5.5)$$

Obraz \mathbf{S}_L středu \mathbf{S} je průsečíkem roviny $\pi_{24,L}$ a přímky $\mathbf{L}_{\mathbf{P}_{1L}, \mathbf{P}_{3L}}$. Vyjádříme jej z rovnice

$$c(\mathbf{S}_L \wedge \mathbf{e}_\infty) = I(\pi_{24,L} \wedge \mathbf{L}_{\mathbf{P}_{1L}, \mathbf{P}_{3L}}). \quad (5.6)$$



Obrázek 7: Nalezení přímky $\mathbf{L}_{O_L, S}$ protínající střed S obdélníka $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$

Bod S pak leží na přímce

$$\mathbf{L}_{O_L, S} = I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{S}_L \wedge e_\infty), \quad (5.7)$$

$$\mathbf{L}_{O_L, S, st} = \frac{\mathbf{L}_{O_L, S}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{O_L, S} \cdot \mathbf{L}_{O_L, S}}}. \quad (5.8)$$

Výše odvozené objekty jsou zobrazeny na obrázku 7.

Poznámka 5.2. Může nastat situace, kdy se body $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$ a \tilde{P}_4 zobrazí na některé z kamer na jedné přímce. V takovém případě odvozený postup selhává. V praxi lze tuto situaci řešit například snímáním stroje další kamerou a získat tak požadovaný záznam. Tímto singulárním případem se dále nebudeme zabývat.

Dále určíme reprezentace přímek spojujících ohnisko s body $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$:

$$\mathbf{L}_{O_L, P_1} = I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{1L} \wedge e_\infty), \quad (5.9)$$

$$\mathbf{L}_{O_L, P_2} = I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{2L} \wedge e_\infty), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{L}_{O_L, P_3} = I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{3L} \wedge e_\infty), \quad (5.11)$$

$$\mathbf{L}_{O_L, P_4} = I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{4L} \wedge e_\infty), \quad (5.12)$$

a převedeme na standardní tvar pomocí vztahu (1.58). Na obrázku 8 jsou vyznačeny přímky ležící v rovině $\pi_{13,L}$, úhly, které tyto přímky svírají, a přímka kolmá k této rovině. Analogicky se označí úhly $\alpha_{24,L}, \alpha'_{24,L}, \beta_{24,L}, \beta'_{24,L}, \gamma_{24,L}, \gamma'_{24,L}$ v rovině $\pi_{24,L}$. Pro získání směrových vektorů úhlopříček obdélníka $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$ budeme rotovat přímku \mathbf{L}_{O_L, P_3} o úhel $\gamma'_{13,L}$ v rovině $\pi_{13,L}$ a přímku \mathbf{L}_{O_L, P_4} o úhel $\gamma'_{24,L}$ v rovině $\pi_{24,L}$. Potřebujeme tedy určit úhly $\gamma'_{13,L}, \gamma'_{24,L}$ a přímky kolmé k těmto rovinám. Nejdříve určíme úhly mezi přímkou $\mathbf{L}_{O_L, S, st}$ a přímkami $\mathbf{L}_{O_L, P_i, st}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\alpha_{13,L} = \arccos(\mathbf{n}_{O_L, S, st} \cdot \mathbf{n}_{O_L, P_1, st}), \quad (5.13)$$

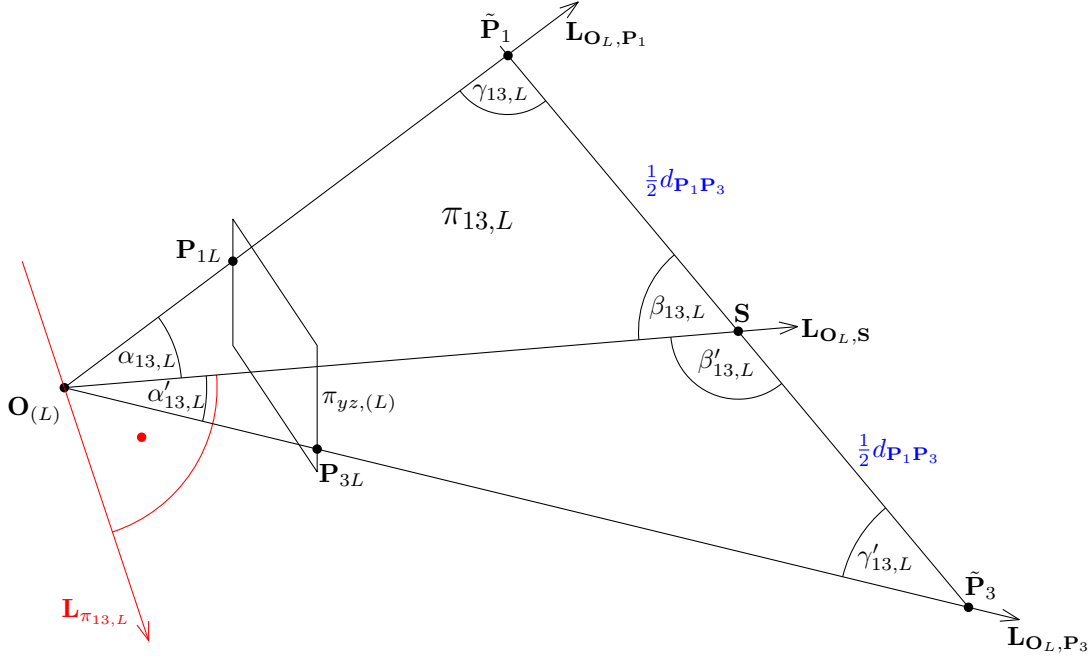
$$\alpha'_{13,L} = \arccos(\mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{S}, st} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_3, st}), \quad (5.14)$$

$$\alpha_{24,L} = \arccos(\mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{S}, st} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_2, st}), \quad (5.15)$$

$$\alpha'_{24,L} = \arccos(\mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{S}, st} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_4, st}), \quad (5.16)$$

kde $\mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{S}, st} = n_{S1}e_1 + n_{S2}e_2 + n_{S3}e_3$ je jednotkový směrový vektor přímky $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{S}, st}$ a $\mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_i, st} = n_{P_i1}e_1 + n_{P_i2}e_2 + n_{P_i3}e_3$ je jednotkový směrový vektor přímky $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_i, st}$.

Poznámka 5.3. Souřadnice směrového vektoru přímky jsou koeficienty u prvků báze $e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2$ (viz (1.75)).



Obrázek 8: Označení úhlů svíraných přímkami v rovině $\pi_{13,L}$

Dle sinové věty lze snadno odvodit, že

$$\gamma'_{13,L} = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad \frac{\sin \alpha_{13,L}}{\sin \alpha'_{13,L}} + \cos(\pi - \alpha_{13,L} - \alpha'_{13,L}) = 0, \quad (5.17)$$

$$\gamma'_{13,L} = \arctan \frac{\sin(\pi - \alpha_{13,L} - \alpha'_{13,L})}{\frac{\sin \alpha_{13,L}}{\sin \alpha'_{13,L}} + \cos(\pi - \alpha_{13,L} - \alpha'_{13,L})} \quad \text{jinak}, \quad (5.18)$$

$$\gamma'_{24,L} = \frac{\pi}{2} \quad \text{pro} \quad \frac{\sin \alpha_{24,L}}{\sin \alpha'_{24,L}} + \cos(\pi - \alpha_{24,L} - \alpha'_{24,L}) = 0, \quad (5.19)$$

$$\gamma'_{24,L} = \arctan \frac{\sin(\pi - \alpha_{24,L} - \alpha'_{24,L})}{\frac{\sin \alpha_{24,L}}{\sin \alpha'_{24,L}} + \cos(\pi - \alpha_{24,L} - \alpha'_{24,L})} \quad \text{jinak}. \quad (5.20)$$

Poznámka 5.4. Oborem hodnot funkce $\arctan(x)$ ve výše uvedeném vztahu uvažujeme množinu $\langle 0, \pi \rangle / \{\frac{\pi}{2}\}$, abychom úhly $\gamma'_{13,L}$ a $\gamma'_{24,L}$ získali nezáporné a konvexní.

Dále určíme přímku kolmou na rovinu $\pi_{13,L, st}$, resp. na rovinu $\pi_{24,L, st}$, procházející počátkem:

$$\mathbf{L}_{\pi_{13,L, st}} = n_{1, \pi_{13,L, st}} e_2 \wedge e_3 + n_{2, \pi_{13,L, st}} e_3 \wedge e_1 + n_{3, \pi_{13,L, st}} e_1 \wedge e_2, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{L}_{\pi_{24,L,st}} = n_{1,\pi_{24,L,st}} e_2 \wedge e_3 + n_{2,\pi_{24,L,st}} e_3 \wedge e_1 + n_{3,\pi_{24,L,st}} e_1 \wedge e_2, \quad (5.22)$$

kde $n_{i,\pi_{13,L,st}}$, resp. $n_{i,\pi_{24,L,st}}$ jsou koeficienty jednotkového normálového vektoru roviny $\pi_{13,L,st}$, resp. roviny $\pi_{24,L,st}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Poznámka 5.5. Souřadnice normálového vektoru roviny jsou koeficienty u prvků báze e_1, e_2, e_3 (viz (1.54)).

Dále provedeme následující rotace přímkou $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_3}$:

$$R_{13,L} = \exp\left(-\frac{\gamma'_{13,L}}{2} \mathbf{L}_{\pi_{13,L,st}}\right), \quad (5.23)$$

$$R_{24,L} = \exp\left(-\frac{\gamma'_{24,L}}{2} \mathbf{L}_{\pi_{24,L,st}}\right), \quad (5.24)$$

$$\mathbf{L}_{P_{N13,L}} = R_{13,L} \mathbf{L}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_3} \tilde{R}_{13,L}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{L}_{P_{N24,L}} = R_{24,L} \mathbf{L}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_4} \tilde{R}_{24,L}. \quad (5.26)$$

Směrové vektory přímek $\mathbf{L}_{P_{N13,L}}$ a $\mathbf{L}_{P_{N24,L}}$ pak odpovídají normálovým vektorům rovin $\tilde{\mathbf{P}}_3 - \tilde{\mathbf{P}}_1$ a $\tilde{\mathbf{P}}_4 - \tilde{\mathbf{P}}_2$ v souřadném systému levé kamery. Ve směru těchto vektorů pak snadno určíme body, jejichž vzdálenost od počátku je rovna jedné. Tyto body označíme $\mathbf{P}_{N13,L}$ a $\mathbf{P}_{N24,L}$. Analogickým postupem lze v pravém souřadném systému nalézt body $\mathbf{P}_{N13,R}$ a $\mathbf{P}_{N24,R}$. Vzájemné natočení souřadných systémů kamer popisuje rotace převádějící bod $\mathbf{P}_{N13,R}$ do bodu $\mathbf{P}_{N13,L}$ a zároveň bod $\mathbf{P}_{N24,R}$ do bodu $\mathbf{P}_{N24,L}$ nebo naopak. Převádě-li rotace jeden bod do druhého, pak osa této rotace musí ležet v rovině souměrnosti těchto dvou bodů, neboť rotace je pohyb po kružnici, jejíž střed je od těchto bodů stejně vzdálený, osa rotace pak tento střed protíná a je kolmá k rovině, v níž tato kružnice leží. Rovinu souměrnosti bodů $\mathbf{P}_{N13,L}$ a $\mathbf{P}_{N13,R}$ nalezneme díky vztahu (1.57) jako

$$\pi_{S13} = \mathbf{P}_{N13,L} - \mathbf{P}_{N13,R}, \quad (5.27)$$

$$\pi_{S13,st} = \frac{\pi_{S13}}{\sqrt{\pi_{S13} \cdot \pi_{S13}}}, \quad (5.28)$$

a rovinu souměrnosti bodů $\mathbf{P}_{N24,L}$ a $\mathbf{P}_{N13,R}$ jako

$$\pi_{S24} = \mathbf{P}_{N24,L} - \mathbf{P}_{N24,R}, \quad (5.29)$$

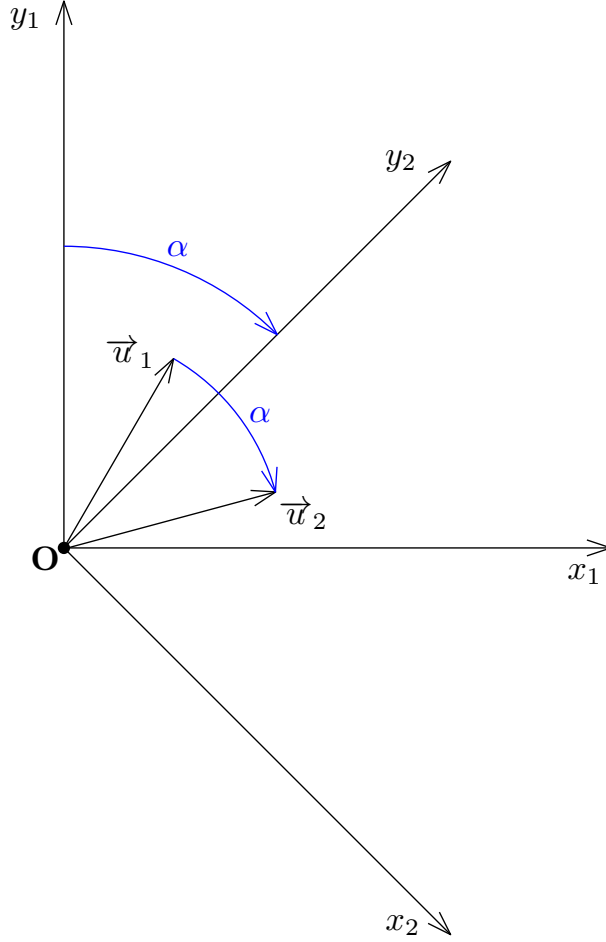
$$\pi_{S24,st} = \frac{\pi_{S24}}{\sqrt{\pi_{S24} \cdot \pi_{S24}}}. \quad (5.30)$$

Výsledná osa rotace leží v obou těchto rovinách, proto platí, že

$$\bar{\mathbf{L}}_{ROT} = \pi_{S13,st} \wedge \pi_{S24,st}, \quad (5.31)$$

$$\bar{\mathbf{L}}_{ROT,st} = \frac{\bar{\mathbf{L}}_{ROT}}{\sqrt{-\bar{\mathbf{L}}_{ROT} \cdot \bar{\mathbf{L}}_{ROT}}}. \quad (5.32)$$

Dále určíme orientaci osy rotace takovým způsobem, aby výsledný motor M_v převáděl reprezentace geometrických objektů ze souřadného systému pravé kamery do souřadného systému levé kamery.



Obrázek 9: Vzájemné otočení souřadných systémů (2D případ)

Poznámka 5.6. Na obrázku 9 lze vidět, že pokud známe úhel natočení souřadných systémů a souřadnice nějakého vektoru \vec{u}_1 ve druhém souřadném systému, potom souřadnice tohoto vektoru v prvním souřadném systému získáme tak, že tento vektor rotujeme o stejný úhel ve stejném směru kolem osy rotace ve druhém souřadném systému. Vektor \vec{u}_2 má pak ve druhém souřadném systému stejné souřadnice jako vektor \vec{u}_1 v prvním souřadném systému. Toho využijeme při určení orientace osy rotace \mathbf{L}_{ROT} a úhlu rotace tak, aby výsledná rotace převáděla směry ze souřadného systému pravé kamery do souřadného systému levé kamery.

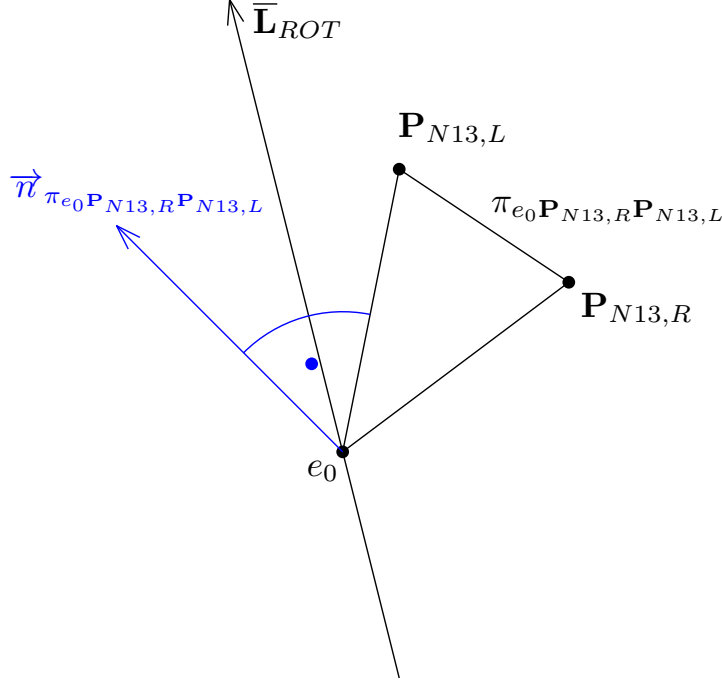
Orientaci osy rotace určíme následovně:

$$\pi_{e_0} \mathbf{P}_{N13,R} \mathbf{P}_{N13,L} = I(e_0 \wedge \mathbf{P}_{N13,R} \wedge \mathbf{P}_{N13,L} \wedge e_\infty), \quad (5.33)$$

$$\mathbf{L}_{ROT,st} = \text{sgn}(\pi_{e_0} \mathbf{P}_{N13,R} \mathbf{P}_{N13,L} \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ROT,st}) \bar{\mathbf{L}}_{ROT,st}, \quad (5.34)$$

kde $\text{sgn}(x)$ je znaménková funkce a $\bar{\mathbf{n}}_{ROT,st}$ je směrový vektor přímky $\bar{\mathbf{L}}_{ROT,st}$. Význam znaménka skalárního součinu vektorů $\pi_{e_0} \mathbf{P}_{N13,R} \mathbf{P}_{N13,L}$ a $\bar{\mathbf{n}}_{ROT,st}$ při určení orientace osy je patrný z obrázku 10.

Poznámka 5.7. Pokud $I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{N13,R} \wedge \mathbf{P}_{N13,L} \wedge e_\infty) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{ROT,st} = 0$, pak se jedná o rotaci o π radiánů, na orientaci osy rotace nezáleží a můžeme tedy použít variantu $\mathbf{L}_{ROT,st} = \bar{\mathbf{L}}_{ROT,st}$ i variantu $\mathbf{L}_{ROT,st} = -\bar{\mathbf{L}}_{ROT,st}$.



Obrázek 10: Normálový vektor roviny $\pi_{e_0 \mathbf{P}_{N13,R} \mathbf{P}_{N13,L}}$ určuje orientaci osy rotace

Dále určíme úhel rotace α_{ROT} . Rotace bodu $\mathbf{P}_{N13,R}$ do bodu $\mathbf{P}_{N13,L}$ probíhá v rovině kolmé na přímkou $\bar{\mathbf{L}}_{ROT,st}$, ve které tyto body leží (viz obrázek 11). Označme tuto rovinu π_p . Pro nalezení roviny π_p nejdříve určíme pomocný bod \mathbf{P}_{Np} , který v ní také leží, následovně:

$$\mathbf{T}_p = 1 - \frac{1}{2} \pi_{24,st} e_\infty, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{P}_{Np} = \mathbf{T}_p \mathbf{P}_{N13,L} \tilde{\mathbf{T}}_p. \quad (5.36)$$

Rovinu π_p pak nalezneme jako

$$\pi_p = I(\mathbf{P}_{N13,L} \wedge \mathbf{P}_{N13,R} \wedge \mathbf{P}_{Np} \wedge e_\infty). \quad (5.37)$$

Z rovnice

$$c(\mathbf{P}_{ROT} \wedge e_\infty) = I(\pi_p \wedge \bar{\mathbf{L}}_{ROT}), \quad c \in \mathbb{R}/\{0\}, \quad (5.38)$$

snadno nalezneme průsečík \mathbf{P}_{ROT} roviny π_p a přímky $\bar{\mathbf{L}}_{ROT}$ (viz (4.38)). Úhel rotace pak svírá normálový vektor roviny

$$\pi_{ROT,L} = \mathbf{P}_{N13,L} - \mathbf{P}_{ROT}, \quad (5.39)$$

$$\pi_{ROT,L,st} = \frac{\pi_{ROT,L}}{\sqrt{\pi_{ROT,L} \cdot \pi_{ROT,L}}}, \quad (5.40)$$

s normálovým vektorem roviny

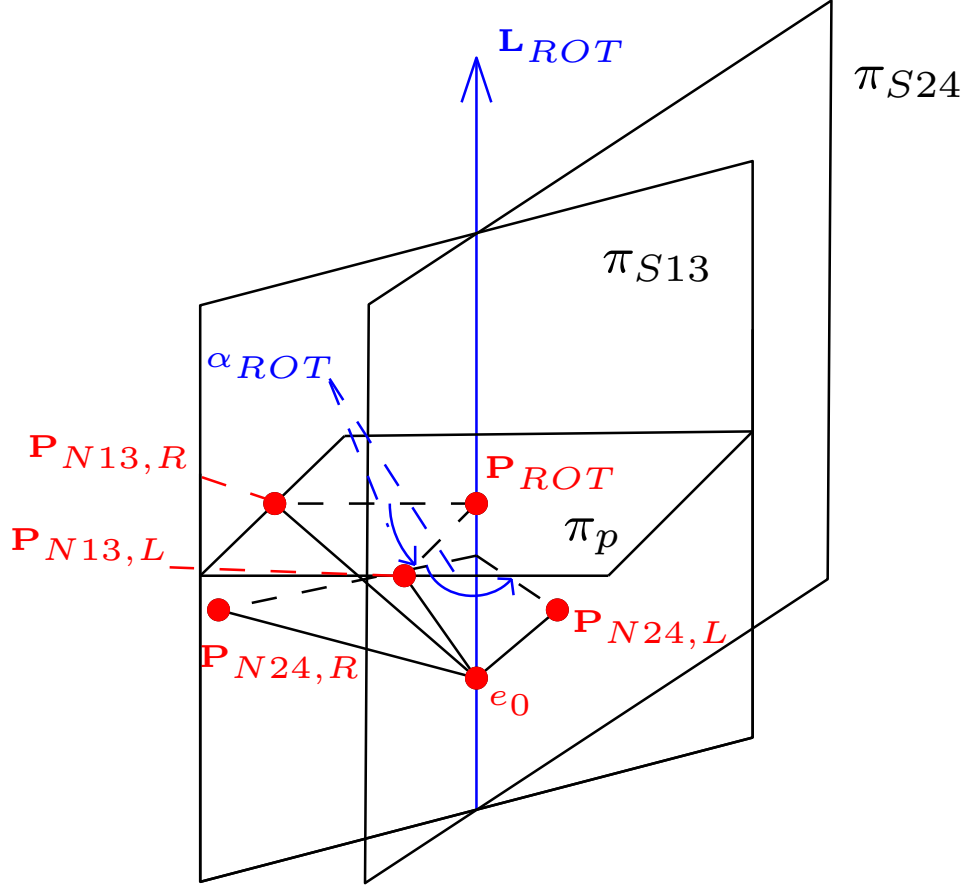
$$\pi_{ROT,R} = \mathbf{P}_{N13,R} - \mathbf{P}_{ROT}, \quad (5.41)$$

$$\pi_{ROT,R,st} = \frac{\pi_{ROT,R}}{\sqrt{\pi_{ROT,R} \cdot \pi_{ROT,R}}}, \quad (5.42)$$

takže

$$\alpha_{ROT} = \arccos(\pi_{ROT,L,st} \cdot \pi_{ROT,R,st}). \quad (5.43)$$

Dále posuneme osu rotace do ohniska **O**:



Obrázek 11: Rotace bodu $\mathbf{P}_{N13,R}$ do bodu $\mathbf{P}_{N13,L}$ a bodu $\mathbf{P}_{N24,R}$ do bodu $\mathbf{P}_{N24,L}$ kolem osy \mathbf{L}_{ROT} o úhel α_{ROT} . π_{S13} - rovina souměrnosti bodů $\mathbf{P}_{N13,R}$ a $\mathbf{P}_{N13,L}$, π_{S24} - rovina souměrnosti bodů $\mathbf{P}_{N24,R}$ a $\mathbf{P}_{N24,L}$

$$T_f = 1 - \frac{1}{2} f e_1 e_\infty, \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{ROT,st} = T_f \mathbf{L}_{ROT,st} \tilde{T}_f. \quad (5.45)$$

Pro výsledný rotor R_{ROT} , popisující natočení souřadného systému pravé kamery vůči souřadnému systému levé kamery, pak platí

$$R_{ROT} = \exp\left(-\frac{\alpha_{ROT}}{2} \tilde{\mathbf{L}}_{ROT,st}\right). \quad (5.46)$$

5.2 Vzájemné posunutí kamer

V dalším postupu nalezneme translátor T_{TRANS} popisující posunutí souřadného systému pravé kamery vůči souřadnému systému levé kamery. Nejdříve určíme velikost úhlopříčky

obdélníka $\tilde{\mathbf{P}}_1, \tilde{\mathbf{P}}_2, \tilde{\mathbf{P}}_3, \tilde{\mathbf{P}}_4$ pomocí vztahu (1.44):

$$d_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3} = \sqrt{-2(\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_3)}. \quad (5.47)$$

Dále chceme nalézt polohu bodu $\tilde{\mathbf{P}}_3$ v souřadném systému levé a pravé kamery. Platí, že

$$\beta'_{13,L} = \pi - \alpha'_{13,L} - \gamma'_{13,L}, \quad (5.48)$$

$$\beta'_{13,R} = \pi - \alpha'_{13,R} - \gamma'_{13,R} \quad (5.49)$$

(viz obrázek 8). Ze sinové věty plyne, že vzdálenost bodu $\tilde{\mathbf{P}}_3$ od levého, resp. pravého ohniska lze vypočítat jako

$$d_{\mathbf{O}_L\tilde{\mathbf{P}}_3} = \frac{1}{2}d_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3} \frac{\sin \beta'_{13,L}}{\sin \alpha'_{13,L}}, \quad (5.50)$$

$$d_{\mathbf{O}_R\tilde{\mathbf{P}}_3} = \frac{1}{2}d_{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3} \frac{\sin \beta'_{13,R}}{\sin \alpha'_{13,R}}. \quad (5.51)$$

Pomocí translátorů $T_{3,L}$ a $T_{3,R}$, které získáme jako

$$\mathbf{t}_{3,L} = d_{\mathbf{O}_L\tilde{\mathbf{P}}_3} \mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_3, st}, \quad (5.52)$$

$$T_{3,L} = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_{3,L}e_\infty, \quad (5.53)$$

$$\mathbf{t}_{3,R} = d_{\mathbf{O}_R\tilde{\mathbf{P}}_3} \mathbf{n}_{\mathbf{O}_R, \mathbf{P}_3, st}, \quad (5.54)$$

$$T_{3,R} = 1 - \frac{1}{2}\mathbf{t}_{3,R}e_\infty, \quad (5.55)$$

kde $\mathbf{n}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_3, st}$ je jednotkový směrový vektor přímky $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_L, \mathbf{P}_3, st}$ a $\mathbf{n}_{\mathbf{O}_R, \mathbf{P}_3, st}$ je jednotkový směrový vektor přímky $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R, \mathbf{P}_3, st}$, určíme polohu bodu $\tilde{\mathbf{P}}_3$ v souřadném systému levé, resp. pravé kamery následovně:

$$\tilde{\mathbf{P}}_3^L = T_{3,L} \mathbf{O} \tilde{T}_{3,L}, \quad (5.56)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_3^R = T_{3,R} \mathbf{O} \tilde{T}_{3,R}. \quad (5.57)$$

Dále rotujeme bod $\tilde{\mathbf{P}}_3^R$ rotorem R_{ROT} :

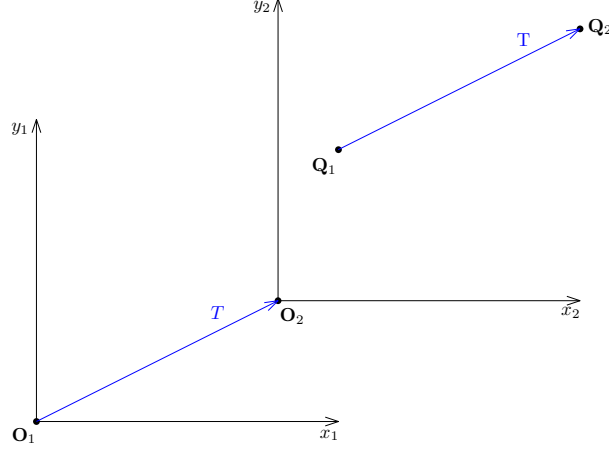
$$\tilde{\mathbf{P}}_{3,ROT}^R = R_{ROT} \tilde{\mathbf{P}}_3^R \tilde{R}_{ROT}. \quad (5.58)$$

Posunutí souřadného systému pravé kamery vůči souřadnému systému levé kamery popisuje translátor T_{TRANS} , získaný jako

$$\pi_{TRANS} = \tilde{\mathbf{P}}_3^L - \tilde{\mathbf{P}}_{3,ROT}^R, \quad (5.59)$$

$$T_{TRANS} = 1 - \frac{1}{2}\pi_{TRANS}e_\infty. \quad (5.60)$$

Poznámka 5.8. Na obrázku 12 lze vidět, že máme-li dva (stejně natočené) souřadné systémy, které jsou vůči sobě posunuté translátorem T , známe souřadnice nějakého bodu \mathbf{Q}_1 ve druhém souřadném systému a chceme získat jeho souřadnice v prvním souřadném systému, pak tento bod posuneme stejným translátorem T ve druhém souřadném systému. Bod \mathbf{Q}_2 má pak ve druhém souřadném systému stejné souřadnice jako bod \mathbf{Q}_1 v prvním souřadném systému. Toho jsme využili při určení směru translace T_{TRANS} .



Obrázek 12: Posunutí souřadných systémů

Výsledný motor

$$M_v = T_{TRANS}R_{ROT} \quad (5.61)$$

pak převádí reprezentace geometrických objektů v souřadném systému pravé kamery na reprezentace v souřadném systému levé kamery. Platí tedy, že

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^L = M_v \tilde{\mathbf{P}}_i^R \tilde{M}_v, \quad i \in \{0, 1, \dots, 8\}. \quad (5.62)$$

Konjugovaný motor

$$\tilde{M}_v = \tilde{R}_{ROT} \tilde{T}_{TRANS} \quad (5.63)$$

pak převádí reprezentace geometrických objektů v souřadném systému levé kamery na reprezentace v souřadném systému pravé kamery, takže

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^R = \tilde{M}_v \tilde{\mathbf{P}}_i^L M_v, \quad i \in \{0, 1, \dots, 8\}. \quad (5.64)$$

5.3 Možnosti poloh kamer

V dalším postupu určíme prostor všech možných poloh kamer v původním souřadném systému. Vzhledem k možnostem pohybu stroje známe body $\tilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}_0$ a $\tilde{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{P}_1$ - jejich poloha se pohybem stroje nezmění. Pomocí výše odvozených postupů dokážeme určit jejich polohu v souřadném systému levé, resp. pravé kamery a následně jejich vzdálenost od ohnisek. Nejprve převedeme reprezentaci levého ohniska a záznamů na levé promítací rovině ze souřadného systému levé kamery do souřadného systému pravé kamery:

$$\mathbf{O}_L^R = \tilde{M}_v \mathbf{O} M_v, \quad (5.65)$$

$$\mathbf{P}_{iL}^R = \tilde{M}_v \mathbf{P}_{iL} M_v, \quad i \in \{0, 1, \dots, 8\}. \quad (5.66)$$

Reprezentace bodů $\tilde{\mathbf{P}}_0$ a $\tilde{\mathbf{P}}_1$ v souřadném systému pravé kamery pak určíme z rovnic

$$c_0(\tilde{\mathbf{P}}_0^R \wedge e_\infty) = I((I(\mathbf{O}_L^R \wedge \mathbf{P}_{0L}^R \wedge \mathbf{P}_{1L}^R \wedge e_\infty)) \wedge (I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{0R} \wedge e_\infty))), \quad (5.67)$$

$$c_1(\tilde{\mathbf{P}}_1^R \wedge e_\infty) = I((I(\mathbf{O}_L^R \wedge \mathbf{P}_{0L}^R \wedge \mathbf{P}_{1L}^R \wedge e_\infty)) \wedge (I(\mathbf{O} \wedge \mathbf{P}_{1R} \wedge e_\infty))), \quad (5.68)$$

kde $c_0, c_1 \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Poznámka 5.9. Pro konstrukci bodů $\tilde{\mathbf{P}}_0^R$ a $\tilde{\mathbf{P}}_1^R$ jsme použili postup z kapitoly 4.

Vzdálenost bodů $\tilde{\mathbf{P}}_0$ a $\tilde{\mathbf{P}}_1$ od ohnisek levé a pravé kamery pak určíme dle vztahu (1.44) jako

$$d_{\mathbf{O}_L \tilde{\mathbf{P}}_0} = \sqrt{-2(\mathbf{O}_L^R \cdot \tilde{\mathbf{P}}_0^R)}, \quad (5.69)$$

$$d_{\mathbf{O}_R \tilde{\mathbf{P}}_0} = \sqrt{-2(\mathbf{O} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_0^R)}, \quad (5.70)$$

$$d_{\mathbf{O}_L \tilde{\mathbf{P}}_1} = \sqrt{-2(\mathbf{O}_L^R \cdot \tilde{\mathbf{P}}_1^R)}, \quad (5.71)$$

$$d_{\mathbf{O}_R \tilde{\mathbf{P}}_1} = \sqrt{-2(\mathbf{O} \cdot \tilde{\mathbf{P}}_1^R)}. \quad (5.72)$$

Dále bud'me v základním souřadném systému. Ohnisko levé kamery leží na sféře

$$\mathbf{S}_{0L} = \tilde{\mathbf{P}}_0 - \frac{1}{2}d_{\mathbf{O}_L \tilde{\mathbf{P}}_0}^2 e_\infty \quad (5.73)$$

(viz (1.48)) a zároveň na sféře

$$\mathbf{S}_{1L} = \tilde{\mathbf{P}}_1 - \frac{1}{2}d_{\mathbf{O}_L \tilde{\mathbf{P}}_1}^2 e_\infty. \quad (5.74)$$

Víme tedy, že leží na kružnici

$$\mathbf{Z}_L = \mathbf{S}_{0L} \wedge \mathbf{S}_{1L} \quad (5.75)$$

(viz obrázek 13). Podobně pro ohnisko pravé kamery víme, že leží na sférách

$$\mathbf{S}_{0R} = \tilde{\mathbf{P}}_0 - \frac{1}{2}d_{\mathbf{O}_R \tilde{\mathbf{P}}_0}^2 e_\infty, \quad (5.76)$$

$$\mathbf{S}_{1R} = \tilde{\mathbf{P}}_1 - \frac{1}{2}d_{\mathbf{O}_R \tilde{\mathbf{P}}_1}^2 e_\infty, \quad (5.77)$$

takže leží na kružnici

$$\mathbf{Z}_R = \mathbf{S}_{0R} \wedge \mathbf{S}_{1R}. \quad (5.78)$$

Dále určíme jednu konkrétní možnost polohy levé a pravé kamery, budeme hovořit o základní pozici a výsledné body v této poloze budeme označovat pomocí horního indexu z . Vezmeme průsečík roviny $\pi_{xz} = e_2$ a kružnice \mathbf{Z}_R , pak obdržíme dvojbod

$$c(\mathbf{O}_R^z \wedge \mathbf{O}_R^{z_2}) = I(\mathbf{Z}_R \wedge \pi_{xz}), \quad c \in \mathbb{R}/\{0\} \quad (5.79)$$

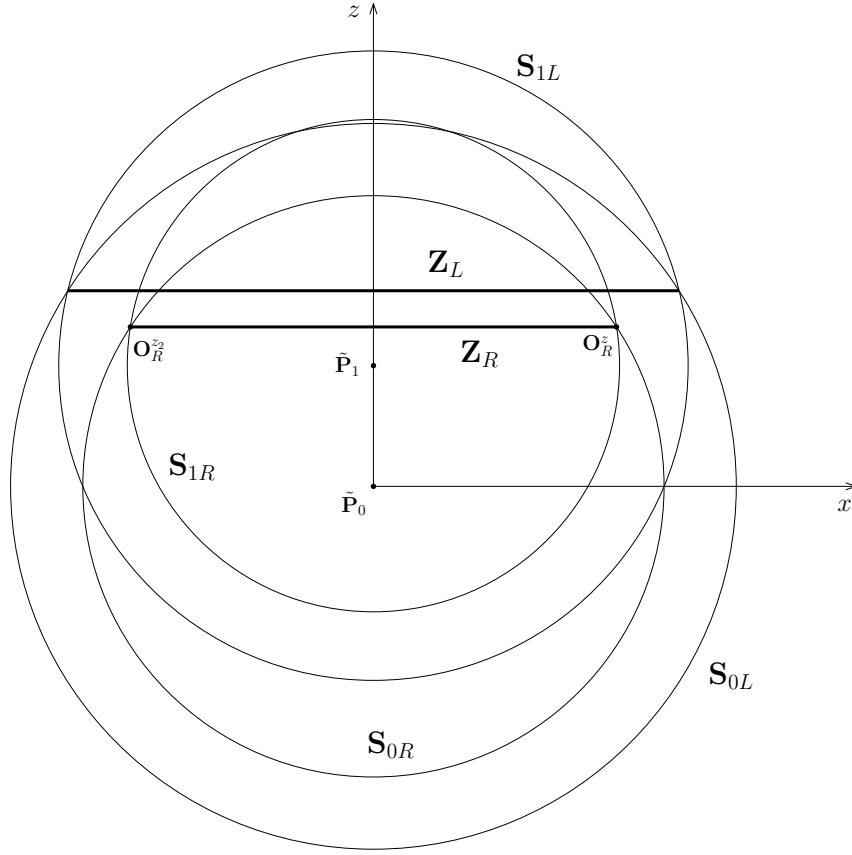
(viz obrázek 13). Z dvojice bodů $c(\mathbf{O}_R^z \wedge \mathbf{O}_R^{z_2})$ chceme nyní vybrat bod \mathbf{O}_R^z s kladnou x -ovou souřadnicí. Přímkou, kterou tyto body určují, získáme jako

$$\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z_2}} = I(c(\mathbf{O}_R^z \wedge \mathbf{O}_R^{z_2}) \wedge e_\infty). \quad (5.80)$$

Dále platí následující vztahy, převzaté z [7]:

$$c_1(\mathbf{S}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z_2}} \wedge e_\infty) = (c(\mathbf{O}_R^z \wedge \mathbf{O}_R^{z_2}) \cdot e_\infty) \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z_2}}, \quad c, c_1 \in \mathbb{R}/\{0\}, \quad (5.81)$$

$$d_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z_2}} = 2\sqrt{\frac{c(\mathbf{O}_R^z \wedge \mathbf{O}_R^{z_2}) \cdot c(\mathbf{O}_R^z \wedge \mathbf{O}_R^{z_2})}{I\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z_2}} \cdot I\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z_2}}}}, \quad (5.82)$$



Obrázek 13: Kružnice \mathbf{Z}_L , na které leží levé ohnisko a kružnice \mathbf{Z}_R , na které leží pravé ohnisko - pohled z boku

kde $\mathbf{S}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z2}}$ je střed úsečky $|\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z2}|$ a $d_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z2}}$ je její velikost. Body \mathbf{O}_R^z a \mathbf{O}_R^{z2} pak získáme posunutím bodu $\mathbf{S}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z2}}$ v kladném, resp. záporném směru přímky $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z2}}$ o vzdálenost $\frac{1}{2}d_{\mathbf{O}_R^z \mathbf{O}_R^{z2}}$.

Dále posuneme body \mathbf{P}_{iR} následovně:

$$\pi_{t_z} = \mathbf{O}_R^z - \mathbf{O}, \quad (5.83)$$

$$T_z = 1 - \frac{1}{2}\pi_{t_z}e_\infty, \quad (5.84)$$

$$\mathbf{P}_{iR,T} = T_z \mathbf{P}_{iR} \tilde{T}_z. \quad (5.85)$$

Nyní potřebujeme určit natočení pravé kamery v základní pozici, k tomu použijeme analogii k postupu znázorněném na obrázku 11. Nejprve chceme nalézt polohy obrazů $\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z$ a $\tilde{\mathbf{P}}_{1R}^z$. Obraz $\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z$ leží na přímce

$$\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_0} = I(\mathbf{O}_R^z \wedge \tilde{\mathbf{P}}_0 \wedge e_\infty), \quad (5.86)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_0, st} = \frac{\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_0}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_0} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_0}}}, \quad (5.87)$$

ve vzdálenosti

$$d_{\mathbf{O} \mathbf{P}_{0R}} = \sqrt{-2(\mathbf{O} \cdot \mathbf{P}_{0R})} \quad (5.88)$$

od ohniska \mathbf{O}_R^z a obraz $\tilde{\mathbf{P}}_{1R}^z$ leží na přímce

$$\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_1} = I(\mathbf{O}_R^z \wedge \tilde{\mathbf{P}}_1 \wedge e_\infty), \quad (5.89)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{1,st}} = \frac{\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_1}}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_1} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_1}}}, \quad (5.90)$$

ve vzdálenosti

$$d_{\mathbf{O} \mathbf{P}_{1R}} = \sqrt{-2(\mathbf{O} \cdot \mathbf{P}_{1R})} \quad (5.91)$$

od ohniska \mathbf{O}_R^z . Obrazy $\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z$ a $\tilde{\mathbf{P}}_{1R}^z$ pak získáme posunutím ohniska \mathbf{O}_R^z pomocí jednotkového směrového vektoru přímky $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{0,st}}$, resp. $\mathbf{L}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{1,st}}$ následovně:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{0R}} = d_{\mathbf{O} \mathbf{P}_{0R}} \mathbf{n}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_0}, \quad (5.92)$$

$$T_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{0R}} = 1 - \frac{1}{2} \mathbf{t}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{0R}} e_\infty, \quad (5.93)$$

$$\mathbf{t}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{1R}} = d_{\mathbf{O} \mathbf{P}_{1R}} \mathbf{n}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_1}, \quad (5.94)$$

$$T_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{1R}} = 1 - \frac{1}{2} \mathbf{t}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{1R}} e_\infty, \quad (5.95)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z = T_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{0R}} \mathbf{O}_R^z \tilde{T}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{0R}}, \quad (5.96)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{1R}^z = T_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{1R}} \mathbf{O}_R^z \tilde{T}_{\mathbf{O}_R^z \tilde{\mathbf{P}}_{1R}}. \quad (5.97)$$

Dále hledáme rotaci převádějící bod $\mathbf{P}_{0R,T}$ do bodu $\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z$ a zároveň bod $\mathbf{P}_{1R,T}$ do bodu $\tilde{\mathbf{P}}_{1R}^z$. Osa rotace tedy leží v rovině souměrnosti bodů $\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z$ a $\mathbf{P}_{0R,T}$

$$\pi_0^z = \tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z - \mathbf{P}_{0R,T}, \quad (5.98)$$

a zároveň v rovině souměrnosti bodů

$$\pi_1^z = \tilde{\mathbf{P}}_{1R}^z - \mathbf{P}_{1R,T}. \quad (5.99)$$

Osu rotace včetně její orientace pak dopočítáme jako

$$\bar{\mathbf{L}}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z = \pi_0^z \wedge \pi_1^z, \quad (5.100)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z = \text{sgn}(I(\mathbf{O}_R^z \wedge \mathbf{P}_{0R,T} \wedge \tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z \wedge e_\infty) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z) \bar{\mathbf{L}}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z, \quad (5.101)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R, st}^z = \frac{\mathbf{L}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z}{\sqrt{-\mathbf{L}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z}}, \quad (5.102)$$

kde $\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z$ je směrový vektor přímky $\bar{\mathbf{L}}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z$. Dále chceme nalézt úhel této rotace. Nejprve najdeme průsečík $\mathbf{P}_{\mathbf{ROT} \mathbf{O}_R}^z$ osy rotace a roviny k ní kolmé, ve které leží body $\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z$ a $\mathbf{P}_{0R,T}$.

$$T_p^z = 1 - \frac{1}{2} \pi_1^z e_\infty, \quad (5.103)$$

$$\mathbf{P}_p^z = T_p^z \tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z \tilde{T}_p^z, \quad (5.104)$$

$$c(\mathbf{P}_{RO\mathbf{O}_R}^z \wedge e_\infty) = I(I(\tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z \wedge \mathbf{P}_{0R,T} \wedge \mathbf{P}_p^z \wedge e_\infty) \wedge \mathbf{L}_{RO\mathbf{O}_R}^z). \quad (5.105)$$

Úhel rotace pak svírají normálové vektory rovin

$$\pi_{ROT\mathbf{P}_{0R,T}}^z = \mathbf{P}_{0R,T} - \mathbf{P}_{RO\mathbf{O}_R}^z, \quad (5.106)$$

$$\pi_{ROT\mathbf{P}_{0R}^z}^z = \tilde{\mathbf{P}}_{0R}^z - \mathbf{P}_{RO\mathbf{O}_R}^z, \quad (5.107)$$

takže

$$\alpha_{RO\mathbf{O}_R} = \arccos(\pi_{ROT\mathbf{P}_{0R,T},st}^z \cdot \pi_{ROT\mathbf{P}_{0R}^z,st}^z). \quad (5.108)$$

Výslednou rotaci pak popisuje rotor

$$R_{RO\mathbf{O}_R}^z = \exp(-\frac{\alpha_{RO\mathbf{O}_R}}{2} \mathbf{L}_{RO\mathbf{O}_R}^z), \quad (5.109)$$

pro záznamy na pravé kameře tedy platí, že

$$\tilde{\mathbf{P}}_{iR}^z = R_{RO\mathbf{O}_R}^z \mathbf{P}_{iR,T} \tilde{R}_{RO\mathbf{O}_R}^z. \quad (5.110)$$

Reprezentace geometrických objektů ze souřadného systému pravé kamery do základní polohy tedy převádí motor

$$M_z = R_{RO\mathbf{O}_R}^z T_z. \quad (5.111)$$

A protože motor \tilde{M}_v převádí reprezentace geometrických objektů ze souřadného systému levé kamery do souřadného systému pravé kamery, platí, že

$$\mathbf{O}_L^z = M_z \tilde{M}_v \mathbf{O}_M \tilde{M}_v M_z, \quad (5.112)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{iL}^z = M_z \tilde{M}_v \mathbf{P}_{iL} M_v \tilde{M}_v M_z. \quad (5.113)$$

Všechny možnosti poloh kamer lze pak popsat pomocí vztahů

$$R_\theta = \exp(-\frac{\theta}{2} e_1 \wedge e_2), \quad (5.114)$$

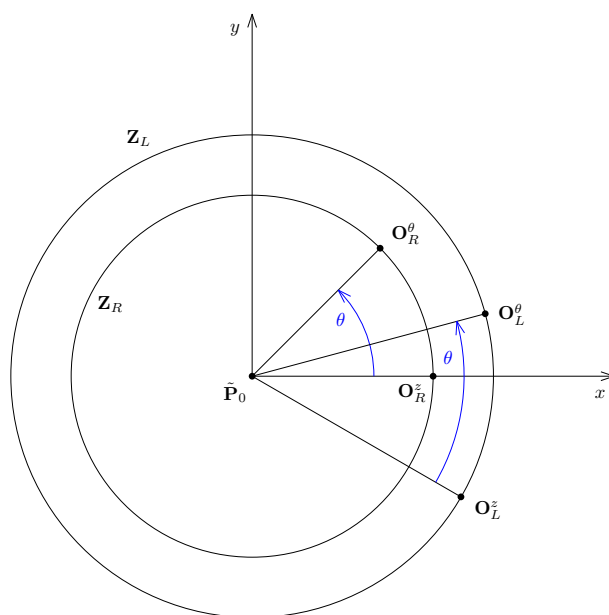
$$\mathbf{O}_L^\theta = R_\theta \mathbf{O}_L^z \tilde{R}_\theta, \quad (5.115)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{iL}^\theta = R_\theta \tilde{\mathbf{P}}_{iL}^z \tilde{R}_\theta, \quad (5.116)$$

$$\mathbf{O}_R^\theta = R_\theta \mathbf{O}_R^z \tilde{R}_\theta, \quad (5.117)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_{iR}^\theta = R_\theta \tilde{\mathbf{P}}_{iR}^z \tilde{R}_\theta, \quad (5.118)$$

kde parametr θ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ (viz obrázek 14).



Obrázek 14: Výsledné možnosti poloh kamer v závislosti na parametru $\theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ - pohled shora

6 Vzorový příklad vypočítaný programem v prostředí CluCalc

V této části je vypočítaný vzorový příklad pomocí vlastního programu, používajícího výše odvozené postupy, vytvořeného v prostředí CluCalc. Toto prostředí je určeno k práci s geometrickými algebrami, umožňuje numerické i grafické výstupy.

6.1 Popis programu

Struktura kódu:

- Zadání vstupů
 - `theta01, theta12, theta34, theta56, theta67` - úhly rotace v jednotlivých osách stroje
 - `OL, alphaL, betaL, gammaL` - poloha a natočení levé kamery
 - `OR, alphaR, betaR, gammaR` - poloha a natočení pravé kamery
 - `f` - ohnisková vzdálenost kamer
- Počáteční poloha stroje a umístění ohniska do bodu $fe_1 + \frac{1}{2}f^2e_\infty + e_0$
 - Grafický a numerický výstup počáteční polohy stroje
- Výpočet dopředné kinematiky
 - Grafický a numerický výstup výsledné polohy stroje
- Motor polohy kamer
 - Numerický výstup motorů `ML` a `MR` určujících polohu levé, resp. pravé kamery
- Inverzní rekonstrukce
 - Numerický výstup záznamů `PL(j)` a `PR(j)` z levé, resp. pravé kamery ležících v rovině `Piyz`, $j = 1, \dots, 9$ (v prostředí CluCalc se číslují pole od 1, v textu číslujeme od 0, v kódu jsou tedy některé indexy o 1 vyšší oproti textu)
- Natočení kamer vůči sobě
 - Numerickým výstupem motor `Mv` převádějící reprezentace geometrických objektů ze souřadného systému pravé kamery do souřadného systému levé kamery
- Prostor možných poloh kamer
 - Grafický a numerický výstup kružnic `ZL` a `ZR` a ohnisek `OLz` a `ORz`, dále numerický výstup vzdáleností `sqrt(-2*(OLz.ORz))` a `sqrt(-2*(OL.OR))` pro ověření, že jsou tyto vzdálenosti stejné, a dále numerický výstup konstant `OLz.ZL`, `ORz.ZR`, `OL.ZL` a `OR.ZR` pro ověření, že ohniska kamer leží na příslušných kružnicích

Ukázka kódu

```
//Zadání vstupů

//Zadání úhlů pro výpočet dopředné kinematiky
theta01 = -Pi/3;
theta12 = -Pi/8;
theta34 = -Pi/3;
theta56 = Pi/2;
theta67 = -Pi;
//Zadání ohniskové vzdálenosti, poloh a natočení kamer
```

```

f=3;
OL = VecN3(12,-14,23); //VecN3(a1,a2,a3) vytvoří bod [a1,a2,a3] v CGA
OR = VecN3(10,11,18);
alphaL = Pi/8;
betaL = Pi/10;
gammaL = Pi/13;
alphaR = Pi/6;
betaR = Pi/12;
gammaR = Pi/12;

:Color(0.5,0,0.5); //vizualizace objektů fialově
:OL - 0.125*einf; //vizualizace skutečné polohy ohnisek (dvojtečkou)
:OR - 0.125*einf; //vizualizováno jako malé sféry pro lepší přehlednost
O~ = VecN3(f,0,0); //ohnisko
//Počáteční poloha stroje
P = List(9); //deklarace pole
P(1) = e0; //indexy polí se číslují od 1, v textu číslujeme od 0
P(2) = VecN3(0,0,1.28);
.
.
.
P(9) = VecN3(0,-2.561,14.28);

?P; //numerický výstup počáteční polohy (otazník před proměnnou)
:P - 0.125*einf; //grafický výstup počáteční polohy

//Výpočet dopředné kinematiky:
L01 = I*(P(1)^P(2)^einf); //vytvoření přímky
L01 = L01/sqrt(-L01.L01); //normování na standardní tvar
R01 = exp(-theta01/2*L01); //výpočet příslušného rotoru
P(3) = R01*P(3)*~R01; //výsledná poloha bodu

L12 = I*(P(2)^P(3)^einf); //vytvoření přímky
L12 = L12/sqrt(-L12.L12); //normování na standardní tvar
.
.
.
L67 = I*(P(7)^P(8)^einf); //vytvoření přímky
L67 = L67/sqrt(-L67.L67); //normování na standardní tvar
R67 = exp(-theta67/2*L67); //výpočet příslušného rotoru
P(9) = R67*R56*R34*R12*R01*P(9)*~R01*~R12*~R34*~R56*~R67; //výs. pol. bodu

:Color(0,0.3,0); //vizualizace objektů tmavě zeleně
?P; //numerický výstup výsledné polohy
:P - 0.125*einf; //grafický výstup výsledné polohy

```

6.2 Příklad

Vstupy

Hodnoty vstupních parametrů jsou stejné jako v ukázce kódu.

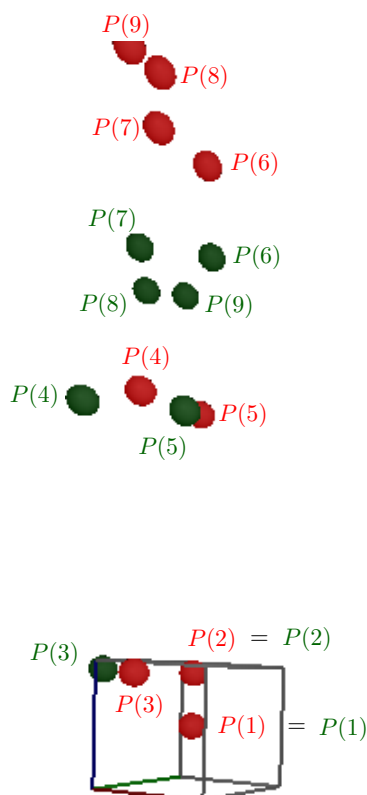
Výstupy

Zde jsou uvedeny numerické a grafické hodnoty žádaných objektů.

Poznámka 6.1. Symbol e_{ij} , resp. e_{ijk} značí prvek $e_i e_j$, resp. $e_i e_j e_k$, $i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, j \neq k, k \neq i$. Symbol e značí prvek e_∞ a symbol E prvek $e_\infty \wedge e_0$.

Motor polohy levé, resp. pravé kamery:

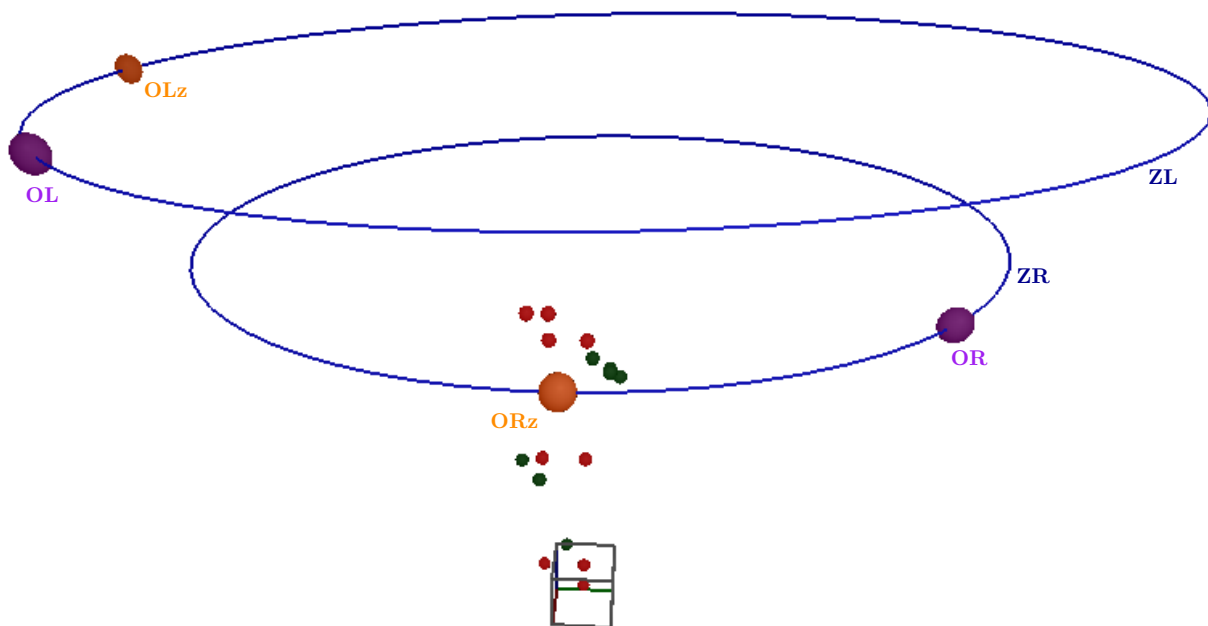
$$\begin{aligned} ML &= 0.965 - 0.0865 e_{23} + 0.176 e_{31} + 0.173 e_{12} - 7.57 e_1^{\wedge} e + 4.47 e_2^{\wedge} e \\ &\quad - 10.4 e_3^{\wedge} e - 0.369 e_{123}^{\wedge} e, \\ MR &= 0.954 + 0.0915 e_{23} + 0.158 e_{31} - 0.238 e_{12} - 6.07 e_1^{\wedge} e - 2.88 e_2^{\wedge} e \\ &\quad - 8.06 e_3^{\wedge} e + 0.95 e_{123}^{\wedge} e. \end{aligned}$$



Obrázek 15: Počáteční poloha (červeně) a výsledná poloha (zeleně)

Motor převádějící reprezentace objektů ze souřadného systému pravé kamery do souřadného systému levé kamery:

$$\begin{aligned} M_V &= 0.9 + 0.102 e_{23} - 0.0192 e_{31} - 0.424 e_{12} + 0.978 e_1^{\wedge} e - 11.3 e_2^{\wedge} e \\ &\quad + 1.91 e_3^{\wedge} e - 1.11e-016 e_1^{\wedge} e_0 - 0.551 e_{123}^{\wedge} e. \end{aligned}$$



Obrázek 16: Kružnice, na kterých leží příslušná ohniska

Kružnice, na kterých leží ohnisko levé a pravé kamery (viz obrázek 16):

$$ZL = 556 \text{ e}^3 - 1.28 \text{ e}^3 - 29.4 \text{ E},$$

$$ZR = 349 \text{ e}^3 - 1.28 \text{ e}^3 - 23 \text{ E}.$$

Základní (možná) poloha ohnisek (viz obrázek 16):

$$ORz = 14.9 \text{ e}^1 + 18 \text{ e}^3 + 273 \text{ e} + 1 \text{ e}^0,$$

$$OLz = -2.29 \text{ e}^1 - 18.3 \text{ e}^2 + 23 \text{ e}^3 + 435 \text{ e} + 1 \text{ e}^0.$$

Porovnání vzdálenosti vypočítaných ohnisek a vstupních ohnisek:

$$dOLzORz = 18.1,$$

$$dOLOR = 18.1.$$

Je splněno, že ohniska OLz a ORz jsou od sebe stejně daleko jako ohniska OL a OR.

Skalární součiny ohnisek OLz a OL, resp. ORz a OR s kružnicí ZL, resp. ZR:

$$dOLzZL = 5.82\text{e-}010 \text{ e}^3 - 2.81\text{e-}005 \text{ e} + 6.48\text{e-}008 \text{ e}^0,$$

$$dOLZL = 5.6\text{e-}008 \text{ e}^3 - 1.39\text{e-}005 \text{ e} + 3.49\text{e-}008 \text{ e}^0,$$

$$dORzZR = 4.37\text{e-}011 \text{ e},$$

$$dORZR = 4.74\text{e-}007 \text{ e}^3 - 1.4\text{e-}005 \text{ e} + 8.28\text{e-}008 \text{ e}^0.$$

Pokud ohniska na těchto kružnicích leží (viz obrázek 16), měly by tyto skalární součiny vzhledem k IPNS reprezentaci vyjít nulové, což je téměř splněno až na mírné numerické chyby. Tím výstupy potvrzují správnost postupu.

Dalšími numerickými výstupy jsou body P v počáteční a výsledné poloze a záznamy PL a PR. Numerické hodnoty těchto výstupů zde vzhledem k jejich rozsáhlosti nejsou uvedeny. Body počáteční a výsledné polohy P jsou znázorněny na obrázku 15. Na tomto obrázku lze vidět, že body P(2), P(3), P(4) a P(5) tvoří v prostoru v počáteční i ve výsledné poloze obdélník. Z tohoto obdélníka vycházíme při odvozování postupů v kapitole 5.

Poznámka 6.2. Obrázky 15 a 16 jsou vytvořeny pomocí vizualizace v prostředí CluCalc.

Závěr

První kapitola této práce se zabývá geometrickou algebrou *CGA*. Je uvedeno, jakými způsoby se v této algebře reprezentují body, sféry, roviny, kružnice, přímky a dvojice bodů - dvojbody. Dále je uveden význam vnitřního součinu, který mezi dvěma geometrickými objekty vyjadřuje míru vzdálenosti, případně odchylku. Na závěr kapitoly jsou uvedeny možnosti geometrických transformací těchto objektů - translace, kterou reprezentují tzv. translátory, rotace, kterou reprezentují tzv. rotory, a pohyb tuhého tělesa, který reprezentují tzv. motory (postupná rotace a translace).

V kapitole 2 je popsána funkce robotického manipulátoru UR10 a uvedeny jeho technické parametry a možnosti pohybu.

V kapitolách 3, 4 a 5 byly uvedeny vlastní postupy řešení problémů. V kapitole 3 byla vyřešena dopředná kinematika, kapitoly 4 a 5 se zabývaly problémy při řízení stroje pomocí binokulárního vidění. V kapitole 4 byla na základě záznamů dvou kamer a znalosti jejich poloh zrekonstruována poloha stroje v prostoru. V kapitole 5 byl vyřešen inverzní problém, kdy byla pomocí záznamů na kamerách, rozměrů stroje UR10 a možností jeho pohybu určena vzájemná poloha kamer vůči sobě a jejich možnosti umístění v prostoru.

V kapitole 6 byla demonstrována správnost odvozených postupů na vzorovém příkladu, vypočítaném pomocí vlastního programu, který tyto postupy k výpočtu používá. Program je vytvořen v prostředí CluCalc. Všechny výsledky vyšly podle předpokladů - ohniska v původní i základní poloze leží na kružnicích vytyčujících možnosti jejich umístění (viz obrázek 16). Ohniska v původní poloze jsou od sebe stejně daleko jako ohniska v poloze základní.

Na práci by bylo možné navázat experimenty, při kterých by se výše odvozené postupy použily při řízení manipulátoru UR10 pomocí dvou a více kamer. Pro použití postupů z kapitoly 5 je třeba vyřešit, jakým způsobem určit jednu konkrétní možnou polohu kamer, pokud známe všechny přípustné polohy a polohu přibližnou. Hledáme pak polohu, která je ze všech přípustných poloh v nějakém smyslu nejbližší poloze přibližné.

Seznam použitých zdrojů

- [1] BAYRO CORROCHANO, Eduardo a Garret SOBCZYK. *Geometric algebra with applications in science and engineering*. Boston: Birkhäuser, c2001. ISBN 08-176-4199-8.
- [2] DORAN, Chris, Anthony LASENBY a Joan LASENBY. *Geometric algebra for physicists*. Cambridge University Press, 2003.
- [3] DORST, Leo, Daniel FONTIJNE a Stephen MANN. *Geometric algebra for computer science: an object-oriented approach to geometry*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2007. Morgan Kaufman series in computer graphics and geometric modeling. ISBN 978-0-12-369465-2.
- [4] HILDENBRAND, Dietmar. *Foundations of geometric algebra computing*. Berlín: Springer, 2013. ISBN 978-3-642-31793-4.
- [5] HRDINA, Jaroslav a Aleš NÁVRAT. *Binocular computer vision based on conformal geometric algebra*. Advances in applied Clifford algebras [online]. Cham: Springer International Publishing, 2017, 27(3), 1945-1959 [cit. 2019-05-23]. DOI: 10.1007/s00006-017-0764-4. ISSN 0188-7009.
- [6] MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. *Pěstujeme lineární algebru*. Praha: Karolinum, 2003, ISBN 80-246-0421-3.
- [7] PERWASS, Christian. *Geometric algebra with applications in engineering*. Berlín: Springer, 2009. ISBN 978-3-642-10032-1.
- [8] ROUSSEAU, Christiane, et al. *Mathematics and technology*. New York: Springer, 2008.
- [9] SELIG, J.M. *Geometric fundamentals of robotics* [online]. 2nd ed. New York: Springer, 2005 [cit. 2017-05-25]. ISBN 978-038-7272-740.
- [10] *Technické detaily UR10* [online] dostupné z https://www.universal-robots.com/media/1801316/cz_199915_ur10_tech_spec_web_a4.pdf .

Seznam příloh

Přílohou k práci je skript vytvořený v prostředí CluCalc s názvem *program.clu*, dostupný z <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117442>. Skript je popsán v kapitole 6. Pro jeho spuštění je nutné nainstalované prostředí CluCalc.